ガウスの惑星方程式

中条 俊大

最終改訂: 2025 年 10 月

本資料は東京工業大学の松永三郎教授の講義資料をもとに作成したものである．内容を一部削減し，変数の定義などは一部変更している．

1 はじめに

「二体問題」では中心天体を質点とみなし，宇宙機はその重力の影響のみを受けて運動することを仮定していたが，実際はそれ以外の力が摂動として作用する．楕円軌道を考えると，このとき軌道六要素（のうち真近点角または離心近点角または平均近点角以外のもの）は一定ではなくなり，時間とともに変化することになる．本稿ではこれを数学的に記述するガウスの惑星方程式について説明する．基本的に「二体問題」の議論を引き継ぐため，本稿で新たに定義する変数以外の定義は「二体問題」を参照されたい．

2 軌道六要素の変化率

摂動による加速度を $\boldsymbol{\beta}$ とする．このとき運動方程式は次のように表せる．

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\beta} \tag{2}$$

ただし，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ とした．本稿ではベクトルを

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1, & r_2, & r_3 \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

と成分表示できるものとする．また，軌道六要素（時間変化する要素として真近点角を採用する）を並べたベクトルを

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a, & e, & i, & \Omega, & \omega, & \theta \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

と表すことにする．軌道六要素はカルテシアンを用いて表せるため，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ の関数とみなすことができる．なお，ある瞬間における $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ から求まる軌道要素を接触軌道要素と呼ぶ．さて，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ は独立変数として考えられるが，それぞれ時刻 t をパラメータとして持つとも考えられ，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

と表すことができる．ただし

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial r_1} & \frac{\partial a}{\partial r_2} & \frac{\partial a}{\partial r_3} \\ \frac{\partial e}{\partial r_1} & \frac{\partial e}{\partial r_2} & \frac{\partial e}{\partial r_3} \\ \frac{\partial i}{\partial r_1} & \frac{\partial i}{\partial r_2} & \frac{\partial i}{\partial r_3} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial r_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial r_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial r_3} \\ \frac{\partial \omega}{\partial r_1} & \frac{\partial \omega}{\partial r_2} & \frac{\partial \omega}{\partial r_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r_1} & \frac{\partial \theta}{\partial r_2} & \frac{\partial \theta}{\partial r_3} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial v_1} & \frac{\partial a}{\partial v_2} & \frac{\partial a}{\partial v_3} \\ \frac{\partial e}{\partial v_1} & \frac{\partial e}{\partial v_2} & \frac{\partial e}{\partial v_3} \\ \frac{\partial i}{\partial v_1} & \frac{\partial i}{\partial v_2} & \frac{\partial i}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial v_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \omega}{\partial v_1} & \frac{\partial \omega}{\partial v_2} & \frac{\partial \omega}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v_1} & \frac{\partial \theta}{\partial v_2} & \frac{\partial \theta}{\partial v_3} \end{bmatrix} \tag{7}$$

である（以降，ベクトルによる微分の形式は同様に考えるものとする）．したがって，式 (1)，(2)，(6) より

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{v}}\left(-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\beta}\right) \tag{8}$$

が得られる．ここで，摂動がない場合，すなわち，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ のときは $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t = \dot{\boldsymbol{x}}^*$ である．ただし

$$\dot{\boldsymbol{x}}^* = \left[\begin{array}{cccccc} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dot{\theta}^* \end{array}\right]^T \tag{9}$$

$$\dot{\theta}^* = \frac{L}{r^2} = (1 + e\cos\theta)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1 - e^3\right)^3}} = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{10}$$

である．$\dot{\theta}^*$ は $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ のときの真近点角の時間微分であり，式 (10) は「二体問題」の式 (13)，(72)，(78) から得られる．結局，式 (6) は次のように整理される．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{v}}\boldsymbol{\beta} + \dot{\boldsymbol{x}}^* \tag{11}$$

式 (11) は軌道六要素の時間微分が $\boldsymbol{v}$ による偏微分から求まることを示している．以降，各軌道要素について具体的にこれを求める．

初めに軌道長半径 a について調べる．まず，「二体問題」の式 (17)，(30) から次式が得られる．

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \mu\left(\frac{2}{\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}} - \frac{1}{a}\right) \tag{12}$$

式 (12) を $\boldsymbol{v}$ で偏微分して整理すると

$$\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{2a^2}{\mu}\boldsymbol{v}^T \tag{13}$$

となる．したがって，式 (9)，(11)，(13) より次式が求まる．

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) \tag{14}$$

次に，以降の計算の準備として角運動量の $\boldsymbol{v}$ による偏微分および時間微分を求める．「二体問題」の式 (13) より

$$L^2 = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \tag{15}$$

であるが，式 (15) を $\boldsymbol{v}$ で偏微分し，「二体問題」の式 (79) も考慮して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} &= \frac{1}{L}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{r}^{\times} \\ &= \frac{1}{L}\left\{\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{v}^T - \left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{r}^T\right\} \\ &= \frac{1}{L}\left\{-\frac{e\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\boldsymbol{r}^T + \frac{a^2\left(1-e^2\right)^2}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\boldsymbol{v}^T\right\} \\ &= -\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\boldsymbol{r}^T + \sqrt{\frac{a^3\left(1-e^2\right)^3}{\mu}}\frac{1}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\boldsymbol{v}^T \end{aligned} \tag{16}$$

が得られる．ここで,「二体問題」の式 (72)，および「二体問題」の式 (36)，(72)，(81) 式から得られる

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{e\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\sin\theta}{1+e\cos\theta} \tag{17}$$

を用いた．また

$$\boldsymbol{r}^{\times} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{array}\right] \tag{18}$$

と定義した．摂動がない場合は角運動量が保存することを考えると，式 (11) と同様に次式が成り立つ．

$$\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\boldsymbol{\beta} \tag{19}$$

したがって，式 (16)，(19) から次式が導かれる．

$$\dot{L} = -\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + \sqrt{\frac{a^3\left(1-e^2\right)^3}{\mu}}\frac{1}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) \tag{20}$$

以上の準備に基づき軌道離心率 e について調べる．まず，「二体問題」の式 (79) から

$$L^2 = \mu a\left(1-e^2\right) \tag{21}$$

であるが，式 (21) を $\boldsymbol{v}$ で偏微分して整理すると次式が得られる．

$$\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{1}{2\mu a e}\left\{\mu\left(1-e^2\right)\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{v}} - 2L\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right\} \tag{22}$$

次に，式 (22) に式 (13)，(16) を代入して整理すると

$$\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{v}} = \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}}\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\boldsymbol{r}^T + \frac{a\left(1-e^2\right)\left(e+e\cos^2\theta+2\cos\theta\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)^2}\boldsymbol{v}^T \tag{23}$$

となる．したがって，式 (9)，(11)，(23) より次式が求まる．

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}}\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + \frac{a\left(1-e^2\right)\left(e+e\cos^2\theta+2\cos\theta\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) \tag{24}$$

続いて軌道傾斜角 i と昇交点赤経 Ω について調べる．まず，「二体問題」の式 (61)，(62) をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ で偏微分すると次のようになる．

$$\boldsymbol{d}_x^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} = \cos i\sin\Omega\frac{\partial i}{\partial \boldsymbol{v}} + \sin i\cos\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{d}_y^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} = -\cos i\cos\Omega\frac{\partial i}{\partial \boldsymbol{v}} + \sin i\sin\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{26}$$

式 (25)，(26) より次式が導かれる．

$$\frac{\partial i}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\sin\Omega}{\cos i}\boldsymbol{d}_x^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\cos\Omega}{\cos i}\boldsymbol{d}_y^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{27}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\cos\Omega}{\sin i}\boldsymbol{d}_x^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{\sin\Omega}{\sin i}\boldsymbol{d}_y^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{28}$$

よって，$\boldsymbol{d}_x^T(\partial\boldsymbol{d}_L/\partial\boldsymbol{v})$，$\boldsymbol{d}_y^T(\partial\boldsymbol{d}_L/\partial\boldsymbol{v})$ が求まればよい．ここで，「二体問題」の式 (13) から

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r}^\times \tag{29}$$

であることを考慮し，「二体問題」の式 (55) を $\boldsymbol{v}$ で偏微分すると次式のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} &= \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{v}}L - \boldsymbol{L}\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}}{L^2} \\ &= \frac{1}{L}\boldsymbol{r}^\times - \frac{1}{L^3}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)^T\boldsymbol{r}^\times \\ &= \frac{1}{L}\boldsymbol{r}^\times - \frac{1}{L^2}\boldsymbol{d}_L\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{r}^\times\end{aligned} \tag{30}$$

ここで，再び「二体問題」の式 (13) を考慮した．また，「二体問題」の式 (55)，(57)，(68) より

$$\boldsymbol{r} = r\cos\left(\theta+\omega\right)\left(\cos\Omega\boldsymbol{d}_x + \sin\Omega\boldsymbol{d}_y\right) + r\sin\left(\theta+\omega\right)\left(-\cos i\sin\Omega\boldsymbol{d}_x + \cos i\cos\Omega\boldsymbol{d}_y + \sin i\boldsymbol{d}_z\right) \tag{31}$$

が得られるが，式 (31) に対して右から $\boldsymbol{d}_x$，$\boldsymbol{d}_y$ を外積して整理するとそれぞれ次のようになる．

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{d}_x = -r\cos\left(\theta+\omega\right)\sin\Omega\boldsymbol{d}_z + r\sin\left(\theta+\omega\right)\left(\sin i\boldsymbol{d}_y - \cos i\cos\Omega\boldsymbol{d}_z\right) \tag{32}$$

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{d}_y = r\cos\left(\theta+\omega\right)\cos\Omega\boldsymbol{d}_z - r\sin\left(\theta+\omega\right)\left(\sin i\boldsymbol{d}_x + \cos i\sin\Omega\boldsymbol{d}_z\right) \tag{33}$$

さらに,「二体問題」の式 (55),(56),(61),(62) より

$$\boldsymbol{L} = L\left(\sin i \sin\Omega \boldsymbol{d}_x - \sin i \cos\Omega \boldsymbol{d}_y + \cos i \boldsymbol{d}_z\right) \tag{34}$$

であるが,式 (31),(34) から次式が得られる.

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L} = rL\cos\left(\theta+\omega\right)\left(\cos i\sin\Omega \boldsymbol{d}_x - \cos i\cos\Omega \boldsymbol{d}_y - \sin i \boldsymbol{d}_z\right) + rL\sin\left(\theta+\omega\right)\left(\cos\Omega \boldsymbol{d}_x + \sin\Omega \boldsymbol{d}_y\right) \tag{35}$$

以上,式 (30),(32),(33),(34),(35) より次式が導かれる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_x^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} &= -\frac{1}{L}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{d}_x\right)^T + \frac{1}{L^2}\left(\boldsymbol{d}_x\cdot\boldsymbol{d}_L\right)\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L}\right)^T \\
&= \frac{r}{L}\sin i\sin\Omega\left\{\cos i\sin\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\cos\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}\boldsymbol{d}_x^T \\
&\quad - \frac{r}{L}\sin i\cos\Omega\left\{\cos i\sin\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\cos\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}\boldsymbol{d}_y^T \\
&\quad + \frac{r}{L}\cos i\left\{\cos i\sin\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\cos\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}\boldsymbol{d}_z^T \\
&= \frac{r\left\{\cos i\sin\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\cos\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}}{L^2}\boldsymbol{L}^T
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_y^T\frac{\partial \boldsymbol{d}_L}{\partial \boldsymbol{v}} &= -\frac{1}{L}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{d}_y\right)^T + \frac{1}{L^2}\left(\boldsymbol{d}_y\cdot\boldsymbol{d}_L\right)\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L}\right)^T \\
&= \frac{r}{L}\sin i\sin\Omega\left\{-\cos i\cos\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\sin\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}\boldsymbol{d}_x^T \\
&\quad - \frac{r}{L}\sin i\cos\Omega\left\{-\cos i\cos\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\sin\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}\boldsymbol{d}_y^T \\
&\quad + \frac{r}{L}\cos i\left\{-\cos i\cos\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\sin\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}\boldsymbol{d}_z^T \\
&= \frac{r\left\{-\cos i\cos\Omega\cos\left(\theta+\omega\right)+\sin\Omega\sin\left(\theta+\omega\right)\right\}}{L^2}\boldsymbol{L}^T
\end{aligned} \tag{37}$$

式 (36),(37) を式 (27),(28) に代入して整理するとそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial i}{\partial \boldsymbol{v}} &= \frac{r\cos\left(\theta+\omega\right)}{L^2}\boldsymbol{L}^T \\
&= \frac{\cos\left(\theta+\omega\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)^T
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{v}} &= \frac{r\sin\left(\theta+\omega\right)}{L^2\sin i}\boldsymbol{L}^T \\
&= \frac{\sin\left(\theta+\omega\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)\sin i}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)^T
\end{aligned} \tag{39}$$

ここで,また「二体問題」の式 (13),(72) を考慮した.したがって,式 (9),(11),(38),(39) より次式が求まる.

$$\dot{i} = \frac{\cos\left(\theta+\omega\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)}\left\{\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\beta}\right\} \tag{40}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\sin\left(\theta+\omega\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)\sin i}\left\{\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\beta}\right\} \tag{41}$$

真近点角 θ について調べる.再び,「二体問題」の式 (72) より

$$r\left(1+e\cos\theta\right) = a\left(1-e^2\right) \tag{42}$$

であるが,式 (42) を $\boldsymbol{v}$ で偏微分して整理すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{v}} &= -\frac{1-e^2}{re\sin\theta}\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{r\cos\theta+2ae}{re\sin\theta}\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{v}} \\
&= -\frac{1+e\cos\theta}{ae\sin\theta}\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{2e+e^2\cos\theta+\cos\theta}{e\left(1-e^2\right)\sin\theta}\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{v}} \\
&= \frac{2e+e^2\cos\theta+\cos\theta}{e\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\left(1+e\cos\theta\right)}\boldsymbol{r}^T - \frac{a\left(1-e^2\right)\left(2+e\cos\theta\right)\sin\theta}{\mu e\left(1+e\cos\theta\right)^2}\boldsymbol{v}^T
\end{aligned} \tag{43}$$

ここで，式 (13)，(23)，および再び「二体問題」の式 (72) を考慮した．したがって，式 (9)，(10)，(11)，(43) より次式が求まる．

$$\dot{\theta} = \frac{2e + e^2\cos\theta + \cos\theta}{e\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\left(1+e\cos\theta\right)}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) - \frac{a\left(1-e^2\right)\left(2+e\cos\theta\right)\sin\theta}{\mu e\left(1+e\cos\theta\right)^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + \left(1+e\cos\theta\right)^2\sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1-e^3\right)^3}} \tag{44}$$

ここで，$\dot{\theta}^*$ を考慮しており，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ の場合でも $\dot{\theta} \neq 0$ であることに注意されたい．

最後に近点引数 ω について調べる．「二体問題」の式 (69) を $\boldsymbol{v}$ で偏微分し，「二体問題」の式 (57) を考慮して整理すると次式が得られる．

$$\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{v}} = -\frac{\boldsymbol{r}\cdot\left(-\sin\Omega\boldsymbol{d}_x + \cos\Omega\boldsymbol{d}_y\right)}{r\sin\left(\theta+\omega\right)}\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{v}} - \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{v}} \tag{45}$$

式 (45) において式 (31) を考慮し，さらに，式 (39)，(43) を代入して整理すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{v}} &= -\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{v}} - \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{v}} \\ &= -\frac{2e + e^2\cos\theta + \cos\theta}{e\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\left(1+e\cos\theta\right)}\boldsymbol{r}^T + \frac{a\left(1-e^2\right)\left(2+e\cos\theta\right)\sin\theta}{\mu e\left(1+e\cos\theta\right)^2}\boldsymbol{v}^T - \frac{\cos i\sin\left(\theta+\omega\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)\sin i}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)^T\end{aligned} \tag{46}$$

したがって，式 (9)，(11)，(46) より次式が求まる．

$$\begin{aligned}\dot{\omega} = &-\frac{2e + e^2\cos\theta + \cos\theta}{e\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\left(1+e\cos\theta\right)}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + \frac{a\left(1-e^2\right)\left(2+e\cos\theta\right)\sin\theta}{\mu e\left(1+e\cos\theta\right)^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) \\ &- \frac{\cos i\sin\left(\theta+\omega\right)}{\mu\left(1+e\cos\theta\right)\sin i}\left\{\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\beta}\right\}\end{aligned} \tag{47}$$

以上，軌道六要素の時間微分が全て求められた．

3 ガウスの惑星方程式

前節で導出した軌道六要素の時間微分は，全て接触軌道要素および $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta}$，$\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\beta}$ を用いて表示していたが，当然特定の座標系で成分表示することもできる．ここでは「二体問題」で定義された単位ベクトル $\boldsymbol{d}_r$，$\boldsymbol{d}_\theta$，および $\boldsymbol{d}_L$ を基底ベクトルとする直交座標系（RTN 座標系と呼ぶ）を考え，$\boldsymbol{\beta}$ を

$$\boldsymbol{\beta} = R\boldsymbol{d}_r + T\boldsymbol{d}_\theta + N\boldsymbol{d}_L \tag{48}$$

と表すことにする．R，T，N はそれぞれ $\boldsymbol{\beta}$ の $\boldsymbol{d}_r$ 方向成分，$\boldsymbol{d}_\theta$ 方向成分，および $\boldsymbol{d}_L$ 方向成分である．また，「二体問題」の式 (72)，(75)，(76)，(80)，(81) より，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{d}_r \\ &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\boldsymbol{d}_r\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{d}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{d}_\theta \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}e\sin\theta\boldsymbol{d}_r + \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\left(1+e\cos\theta\right)\boldsymbol{d}_\theta\end{aligned} \tag{50}$$

と表せる．したがって，式 (48)，(49)，(50) より

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}R \tag{51}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}e\sin\theta R + \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\left(1+e\cos\theta\right)T \tag{52}$$

$$\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}N \tag{53}$$

が得られる．式 (14)，(24)，(40)，(41)，(44)，(47) に式 (51)，(52)，(53) を代入して整理すると次のようになる．

$$\dot{a} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu\left(1-e^2\right)}}e\sin\theta R + 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu\left(1-e^2\right)}}\left(1+e\cos\theta\right)T \tag{54}$$

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\sin\theta R + \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{e+e\cos^2\theta+2\cos\theta}{1+e\cos\theta}T \tag{55}$$

$$\dot{i} = \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\cos\left(\theta+\omega\right)}{\left(1+e\cos\theta\right)}N \tag{56}$$

$$\dot{\Omega} = \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\sin\left(\theta+\omega\right)}{\left(1+e\cos\theta\right)\sin i}N \tag{57}$$

$$\dot{\omega} = -\sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\cos\theta}{e}R + \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\left(2+e\cos\theta\right)\sin\theta}{e\left(1+e\cos\theta\right)}T - \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\sin\left(\theta+\omega\right)}{\left(1+e\cos\theta\right)\tan i}N \tag{58}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\cos\theta}{e}R - \sqrt{\frac{a\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{\left(2+e\cos\theta\right)\sin\theta}{e\left(1+e\cos\theta\right)}T + \left(1+e\cos\theta\right)^2\sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1-e^3\right)^3}} \tag{59}$$

式 (54)，(55)，(56)，(57)，(58)，(59) をガウスの惑星方程式と呼ぶ.

4　おわりに

ガウスの惑星方程式は，摂動の影響による軌道六要素の変化率を調べること以外に，特に連続推力により特定の軌道要素を変化させるための適切な制御則を考えることにも有用である（推力も $\boldsymbol{\beta}$ に含まれるものとして扱うことができる）．例えば，円軌道（$e=0$）の場合，式 (54) は $\dot{a}=2\sqrt{a^3/\mu}T$ と簡略化されるが，これは推力の軌道接線方向成分が軌道長半径の変化に寄与することを意味している．また，本稿では RTN 座標系に注目したが，任意の座標系で同様にガウスの惑星方程式を導出できる．さらに，離心近点角や平均近点角の時間微分を導出することもできる．