

姿勢運動学

中条 俊大

最終改訂: 2025 年 10 月

本資料は、東京工業大学の松永三郎教授の講義資料（宇宙ステーション入門（東京大学出版会）の6章の抜粋をベースに修正・追記したもの）をもとに作成したものである。内容を一部削減し、変数の定義などは一部変更している。

1 はじめに

宇宙機の姿勢運動における運動学（kinematics）とは、姿勢角と角速度の関係を考える学問である。物体の姿勢（回転角）を表現する方法は様々あり、それぞれの方法で用いる（姿勢を表現する）パラメータの時間微分と角速度の関係を求めることが目的である。本稿では、それら全ての基礎となるベクトル表現を出発点とし、座標変換行列、角速度の定義を行った後、代表的な回転の表現についてそれぞれパラメータの時間微分と角速度の関係を導出する。

2 ベクトル表現

2つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} に対してそのなす角を θ とすると、次の演算が定義されている。

- 内積:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1)$$

- 外積:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \mathbf{c} \quad (2)$$

ただし、 \mathbf{c} は \mathbf{a} と \mathbf{b} に直交する単位ベクトル ($|\mathbf{c}| = 1$) であり、その方向は \mathbf{a} と \mathbf{b} が張る平面内で \mathbf{a} を \mathbf{b} に向かって回したとき（回す角度が θ となる）に右ねじが進む方向である。

以降、これらの演算やベクトル、行列の基本法則に則り数式処理を行う。

右手系正規直交基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を有する直交座標系 A 系を定義する。これらの基底ベクトルは次の条件を満たす。

- 内積:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \quad (4)$$

- 外積:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \quad (6)$$

次式が成り立つことは容易に確認できる。

$$[\mathbf{a}]^T [\mathbf{a}] = [\mathbf{a}] [\mathbf{a}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし, $[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]^T$ とする. 任意のベクトル \mathbf{x} は, 基底ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の一次結合により表せる.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= {}^A x_1 \mathbf{a}_1 + {}^A x_2 \mathbf{a}_2 + {}^A x_3 \mathbf{a}_3 \\ &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} {}^A x_1 \\ {}^A x_2 \\ {}^A x_3 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{a}]^T {}^A x\end{aligned}\tag{8}$$

ただし, ${}^A x = [{}^A x_1, {}^A x_2, {}^A x_3]^T$ であり, ${}^A x_1, {}^A x_2, {}^A x_3$ をベクトル \mathbf{x} の A 系における成分という. ${}^A x$ はこれらを並べたもの (細字表記) であり, \mathbf{x} (太字表記) とは異なることに注意されたい. A 系で成分表示した行列 ${}^A X$ に対して $\mathbf{X} = [{}^A]^T {}^A X [\mathbf{a}]$ をダイアディックと呼ぶが, これらも細字と太字で表記を分けている. 式 (8) と $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の内積をとると

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1 = {}^A x_1, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_2 = {}^A x_2, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_3 = {}^A x_3\tag{9}$$

となる. つまり, あるベクトルの成分を求めるためには, 対応する基底ベクトルとの内積をとればよい. また, 任意の 2 つのベクトル $\mathbf{x} = [\mathbf{a}]^T x$ ($x = [x_1, x_2, x_3]^T$), $\mathbf{y} = [\mathbf{a}]^T y$ ($y = [y_1, y_2, y_3]^T$) に対して, 内積と外積はそれぞれ次のように成分表示される.

- 内積:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\tag{10}$$

- 外積:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = [\mathbf{a}]^T x^\times y = [\mathbf{a}]^T \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}\tag{11}$$

ただし,

$$x^\times = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}\tag{12}$$

と定義する.

さらに, 次の演算を定義する.

$$\mathbf{x} \mathbf{y} = [\mathbf{a}]^T x y^T [\mathbf{a}]\tag{13}$$

式 (10), (11), (13) は, 同一の演算をベクトル (\mathbf{x}, \mathbf{y}) で表現する場合と成分を並べた列 (x, y) で表示する場合で表記法が異なることを意味しており, 例えば, $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ や $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ とは書かない. ただし, あくまで便宜上表記が異なるだけであり, 必要に応じて表記法を使い分ければよい. 本稿でも場面に応じて適切な表記法を選び議論を行う.

3 座標変換行列

右手系正規直交基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ($[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]^T$) を有する直交座標系 B 系を定義し, 2 つの座標系 A 系と B 系の関係について調べる. 式 (8) と同様に, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いて次のように表される.

$$\mathbf{b}_1 = C_{11} \mathbf{a}_1 + C_{12} \mathbf{a}_2 + C_{13} \mathbf{a}_3\tag{14}$$

$$\mathbf{b}_2 = C_{21} \mathbf{a}_1 + C_{22} \mathbf{a}_2 + C_{23} \mathbf{a}_3\tag{15}$$

$$\mathbf{b}_3 = C_{31} \mathbf{a}_1 + C_{32} \mathbf{a}_2 + C_{33} \mathbf{a}_3\tag{16}$$

行列形式で書けば

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}\tag{17}$$

右辺の係数行列を $C^{B/A}$ とおけば

$$[\mathbf{b}] = C^{B/A} [\mathbf{a}]\tag{18}$$

となる。ここで、 $C^{B/A}$ を A 系から B 系への座標変換行列または方向余弦行列 (Direction Cosine Matrix (DCM)) と呼ぶ。式 (18) より

$$C^{B/A} = [\mathbf{b}] [\mathbf{a}]^{-1} = [\mathbf{b}] [\mathbf{a}]^T \quad (19)$$

である。

さて、式 (14) と \mathbf{a}_1 の内積をとると $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = C_{11}$ となる。同様に、 $i, j = 1, 2, 3$ に対して

$$C_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j \quad (20)$$

が成り立つ。行列形式で書くと

$$C^{B/A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

となる。式 (21) より、座標変換行列の列成分は A 系基底ベクトルを B 系で表した成分、行成分は B 系基底ベクトルを A 系で表した成分となっていることが分かる。式 (18) に左から $C^{B/A^{-1}}$ を掛けると

$$C^{B/A^{-1}} [\mathbf{b}] = [\mathbf{a}] \quad (22)$$

となる。一方、 A 系と B 系を入れ替えて同様の議論をすれば、式 (18) と同様に

$$[\mathbf{a}] = C^{A/B} [\mathbf{b}] \quad (23)$$

が得られる。また、式 (21) と同様に

$$C^{A/B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

が得られる。式 (22), (23) から

$$C^{B/A^{-1}} = C^{A/B} \quad (25)$$

であり、式 (21), (24) から

$$C^{B/A^T} = C^{A/B} \quad (26)$$

となることが分かる。さらに、式 (25), (26) から

$$C^{B/A^T} = C^{B/A^{-1}} \quad (27)$$

となるため、座標変換行列は直交行列であることが分かる。

次に、式 (8) と同様にベクトル \mathbf{x} を B 系で成分表示した場合、 ${}^B x = [{}^B x_1, {}^B x_2, {}^B x_3]^T$ として

$$\mathbf{x} = [\mathbf{b}]^T {}^B x \quad (28)$$

となり、式 (18) とあわせると

$${}^B x = [\mathbf{b}] [\mathbf{a}]^T {}^A x = C^{B/AA} x \quad (29)$$

となる。つまり、任意のベクトル \mathbf{x} の A 系での成分表示を B 系での成分表示に変換する場合も、同様に $C^{B/A}$ を掛ければよいと分かる。

簡単な例を示す。 A 系を \mathbf{a}_3 軸回りに θ だけ回転すると B 系に一致する場合 (図 1)、幾何学的関係から次式が示される。

$$C^{B/A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

この座標変換行列について、上記で示した関係が全て成立することは容易に確認できる。

3 つ以上の直交座標系がある場合も同様である。第三の座標系を C 系とすると

$$C^{C/A} = C^{C/B} C^{B/A} \quad (31)$$

$${}^C x = C^{C/BB} x = C^{C/AA} x = C^{C/B} C^{B/AA} x \quad (32)$$

となことは容易に示される。

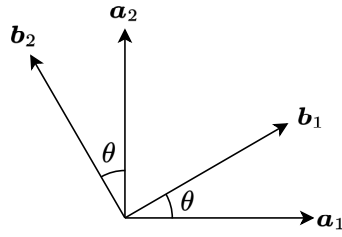


図1 A系とB系の関係の例.

4 角速度

座標変換行列に基づいて角速度を定義する。まず、A系を基準とする（A系から見た）時間微分の演算子を $\frac{A d}{dt}$ と定義する。基底ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の時間微分については

$$\frac{A d\mathbf{a}_1}{dt} = \frac{A d\mathbf{a}_2}{dt} = \frac{A d\mathbf{a}_3}{dt} = \mathbf{0} \quad (33)$$

である。これは基底ベクトルがA系に固定されていることを示す。また一般のスカラー変数に対しては通常の時間微分として作用すると定義する。任意のベクトル $\mathbf{x} = [\mathbf{a}]^T A x$ については

$$\frac{A d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{a}]^T A \dot{x} \quad (34)$$

となる。ドットは通常の時間微分を表す。式(34)から、A系を基準とする時間微分はA系で表された成分を時間微分することを意味する。一方、 $\mathbf{x} = [\mathbf{b}]^T B x$ と表現する場合

$$\begin{aligned} \frac{A d\mathbf{x}}{dt} &= \left(\frac{A d}{dt} [\mathbf{b}]^T \right) B x + [\mathbf{b}]^T B \dot{x} \\ &= \left(\frac{A d}{dt} [\mathbf{a}]^T C^{B/A^T} \right) B x + [\mathbf{b}]^T B \dot{x} \\ &= [\mathbf{a}]^T \dot{C}^{B/A^T} B x + [\mathbf{b}]^T B \dot{x} \\ &= [\mathbf{b}]^T C^{B/A} \dot{C}^{B/A^T} B x + [\mathbf{b}]^T B \dot{x} \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、 $C^{B/A} C^{B/A^T} = E$ (単位行列) の両辺を時間微分すると

$$\dot{C}^{B/A} C^{B/A^T} + C^{B/A} \dot{C}^{B/A^T} = \mathbf{0} \quad (36)$$

であるから

$$C^{B/A} \dot{C}^{B/A^T} = -\dot{C}^{B/A} C^{B/A^T} = -\dot{C}^{B/A^T T} C^{B/A^T} = -\left(C^{B/A} \dot{C}^{B/A^T} \right)^T \quad (37)$$

となる。つまり、 $C^{B/A} \dot{C}^{B/A^T}$ は交代行列である。一般に、 3×3 交代行列 W について

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \quad (38)$$

とすると、 $W^T = -W$ より

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{21} & W_{31} \\ W_{12} & W_{22} & W_{32} \\ W_{13} & W_{23} & W_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \quad (39)$$

が成り立つ。したがって、

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -W_{21} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & -W_{32} \\ -W_{13} & W_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

と表せる. $W_{32} = -W_{23} = \omega_1$, $W_{13} = -W_{31} = \omega_2$, $W_{21} = -W_{12} = \omega_3$ とおけば

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

となる. したがって,

$$C^{B/A} \dot{C}^{B/A T} = \begin{bmatrix} 0 & -B\omega_3 & B\omega_2 \\ B\omega_3 & 0 & -B\omega_1 \\ -B\omega_2 & B\omega_1 & 0 \end{bmatrix} = {}^B\omega^\times \quad (42)$$

と定義できる. ただし, ${}^B\omega = [{}^B\omega_1, {}^B\omega_2, {}^B\omega_3]^T$ である. これより式 (35) は次式のように整理される.

$$\begin{aligned} \frac{{}^A d\mathbf{x}}{dt} &= [\mathbf{b}]^T {}^B\omega^\times {}^Bx + [\mathbf{b}]^T {}^B\dot{x} \\ &= \boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \mathbf{x} + \frac{{}^B d\mathbf{x}}{dt} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで,

$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\mathbf{b}]^T {}^B\omega \quad (44)$$

とした (簡単のため ${}^B\omega^{B/A}$ を ${}^B\omega$ と表記する). これが A 系に対する B 系の角速度ベクトルである. その B 系における成分表示は座標変換行列から式 (42) によって求められる. また A 系で成分表示する場合, すなわち, ${}^A\omega = [{}^A\omega_1, {}^A\omega_2, {}^A\omega_3]^T$ として

$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\mathbf{a}]^T {}^A\omega \quad (45)$$

と考える場合 (簡単のため ${}^A\omega^{B/A}$ を ${}^A\omega$ と表記する)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \mathbf{x} &= [\mathbf{b}]^T {}^B\omega^\times {}^Bx \\ &= [\mathbf{a}]^T C^{B/A T} C^{B/A} \dot{C}^{B/A T} C^{B/AA} x \\ &= [\mathbf{a}]^T \dot{C}^{B/A T} C^{B/AA} x \end{aligned} \quad (46)$$

であることから

$$\dot{C}^{B/A T} C^{B/AA} = {}^A\omega \quad (47)$$

であることがいえる. $\boldsymbol{\omega}^{B/A}$ の A 系における成分表示は, 座標変換行列から式 (47) によって求められる.

式 (43) において $\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, 3$) とすれば, B 系の基底ベクトルの時間微分が次式の通り得られる.

$$\frac{{}^A d\mathbf{b}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \mathbf{b}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (48)$$

また, 式 (42) から, 座標変換行列の時間微分は次のように表せる.

$$\dot{C}_{11} = {}^B\omega_3 C_{21} - {}^B\omega_2 C_{31}, \quad \dot{C}_{12} = {}^B\omega_3 C_{22} - {}^B\omega_2 C_{32}, \quad \dot{C}_{13} = {}^B\omega_3 C_{23} - {}^B\omega_2 C_{33} \quad (49)$$

$$\dot{C}_{21} = {}^B\omega_1 C_{31} - {}^B\omega_3 C_{11}, \quad \dot{C}_{22} = {}^B\omega_1 C_{32} - {}^B\omega_3 C_{12}, \quad \dot{C}_{23} = {}^B\omega_1 C_{33} - {}^B\omega_3 C_{13} \quad (50)$$

$$\dot{C}_{31} = {}^B\omega_2 C_{11} - {}^B\omega_1 C_{21}, \quad \dot{C}_{32} = {}^B\omega_2 C_{12} - {}^B\omega_1 C_{22}, \quad \dot{C}_{33} = {}^B\omega_2 C_{13} - {}^B\omega_1 C_{23} \quad (51)$$

さらに, 3つの座標変換行列 $C^{B/A}$, $C^{C/B}$, $C^{C/A}$ に対する角速度ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\omega}^{B/A}$, $\boldsymbol{\omega}^{C/B}$, $\boldsymbol{\omega}^{C/A}$ とすると, 次の関係式が成り立つ.

$$\boldsymbol{\omega}^{C/A} = \boldsymbol{\omega}^{C/B} + \boldsymbol{\omega}^{B/A} \quad (52)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{A/B} = -\boldsymbol{\omega}^{B/A} \quad (53)$$

簡単な例を示す. A 系を \mathbf{a}_3 軸回りに θ だけ回転すると B 系に一致する場合, 式 (30) より

$$\begin{aligned} C^{B/A} \dot{C}^{B/A T} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

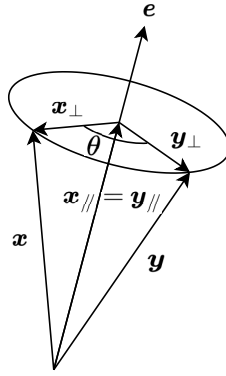


図2 一軸回転による回転変換のイメージ.

となる. したがって

$$\omega^{B/A} = [b_1, b_2, b_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (55)$$

である.

5 回転の表現

前節までは座標変換行列を9つの成分(方向余弦)で表したが, 本節では回転を表す幾何学的な量と結びつけて考える. 一般に剛体の回転の自由度は3である. なぜなら, 回転は座標変換行列で特徴付けられるが, その行列の3つの列を考えると, その大きさはそれぞれ1であること, 互いが直交すること, 計6つの拘束条件があるためである. 結局, その独立なパラメータの数は9つから6つを引いた3つとなり, 9つのパラメータの使用は冗長である. 本節では座標変換行列を9つより少ない数のパラメータで表現することを考える.

5.1 オイラー回転軸と回転角

任意の回転はある一軸回りの回転で表現できることをオイラー(Euler)の定理という. まず, この定理を証明する. A 系から B 系への座標変換行列 $C^{B/A}$ に対応する一軸回転が存在すると仮定し, その回転軸(オイラー回転軸と呼ぶ)の単位方向ベクトルを e , 回転角を右ねじの方向を正として θ とする. このとき e の成分は A 系と B 系で変わらないため, $e = [a]^T A e = [b]^T B e$ とすると $A e = B e \equiv e$ である. 一方,

$$e = [a]^T e = [b]^T C^{B/A} e \quad (56)$$

であるため

$$C^{B/A} e = e \quad (57)$$

が成り立つ. 式(57)は $C^{B/A}$ が固有値1に対応する固有ベクトル e を有することを意味している. したがって, $C^{B/A}$ が固有値1を有することを示せばよい. $C^{B/A}$ の固有値を λ とすると, 特性方程式は

$$\left| C^{B/A} - \lambda E \right| = 0 \quad (58)$$

である. $C^{B/A}$ が 3×3 直交行列であることを利用すると, 式(58)は次式のように整理される.

$$-(\lambda - 1) \left\{ \lambda^2 - (\text{tr} C^{B/A} - 1) \lambda + 1 \right\} = 0 \quad (59)$$

式(59)より $C^{B/A}$ は確かに固有値1を有することが分かる. 以上によりオイラーの定理が示された.

e および θ と $C^{B/A}$ の関係を求める. 図2を参照し, 幾何学的に求めることとする. まず, A 系に固定されたベクトル x と, A 系を e 回りに θ だけ回転させることで得られる B 系に固定されたベクトル y を考える. ただし, 回転

前は \mathbf{x} と \mathbf{y} は一致しているものとする。このとき A 系における \mathbf{x} の成分と B 系における \mathbf{y} の成分は等しいので、これを x とおくと

$$\mathbf{x} = [\mathbf{a}]^T x \quad (60)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{b}]^T x \quad (61)$$

と表せる。さて、回転軸 \mathbf{e} 方向について、平行成分を下付き文字 \parallel 、垂直成分を下付き文字 \perp で表すことにする。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} \quad (62)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\parallel} + \mathbf{y}_{\perp} \quad (63)$$

このとき、幾何学的関係から

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{y}_{\parallel} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e} = (\mathbf{e}\mathbf{e}) \mathbf{x} \quad (64)$$

$$\mathbf{y}_{\perp} = \cos \theta \mathbf{x}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{e} \times \mathbf{x}_{\perp} \quad (65)$$

が成り立つ。式 (62), (63), (64), (65) より

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x}_{\parallel} + \cos \theta \mathbf{x}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{e} \times \mathbf{x}_{\perp} \\ &= \mathbf{x}_{\parallel} + \cos \theta (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}) + \sin \theta \mathbf{e} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}) \\ &= (\cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{e}^{\times}) \mathbf{x} + (1 - \cos \theta) \mathbf{x}_{\parallel} \\ &= \{\cos \theta \mathbf{E} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e}\mathbf{e} + \sin \theta \mathbf{e}^{\times}\} \mathbf{x} \\ &\equiv \mathbf{R}^{B/A} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (66)$$

が得られる。 $\mathbf{R}^{B/A} = \cos \theta \mathbf{E} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \sin \theta \mathbf{e}^{\times}$ は回転ダイアデックと呼ばれる。ただし、 $\mathbf{E} = [\mathbf{a}]^T \mathbf{E} [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]^T \mathbf{E} [\mathbf{b}]$ (単位ダイアデック), $\mathbf{e}^{\times} = [\mathbf{a}]^T \mathbf{e}^{\times} [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]^T \mathbf{e}^{\times} [\mathbf{b}]$ (外積ダイアデック) である。改めて式 (66) を成分で表示すると次式のようなになる。

$$[\mathbf{b}]^T \mathbf{x} = [\mathbf{a}]^T \{\cos \theta \mathbf{E} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \sin \theta \mathbf{e}^{\times}\} \mathbf{x} \quad (67)$$

式 (67) は任意の \mathbf{x} について成り立つので

$$[\mathbf{b}]^T = [\mathbf{a}]^T \{\cos \theta \mathbf{E} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \sin \theta \mathbf{e}^{\times}\} \quad (68)$$

となる。式 (18), (68) より次式が得られる。

$$\mathbf{C}^{B/A} = [\mathbf{b}] [\mathbf{a}]^T = \left([\mathbf{a}] [\mathbf{b}]^T\right)^T = \cos \theta \mathbf{E} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e}\mathbf{e}^T - \sin \theta \mathbf{e}^{\times} \quad (69)$$

ここで、 $(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)^T = \mathbf{e}\mathbf{e}^T$, $\mathbf{e}^{\times T} = -\mathbf{e}^{\times}$ であることを用いた。

次に、逆に \mathbf{e} および θ を $\mathbf{C}^{B/A}$ を用いて表すことを考える。式 (69) に対して tr をとると

$$\text{tr} \mathbf{C}^{B/A} = 1 + 2 \cos \theta \quad (70)$$

すなわち、

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \mathbf{C}^{B/A} - 1 \right) = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1) \quad (71)$$

が得られる。さらに式 (69) より、 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T$ として

$$\begin{bmatrix} C_{32} - C_{23} \\ C_{13} - C_{31} \\ C_{21} - C_{12} \end{bmatrix} = -2 \sin \theta \mathbf{e} \quad (72)$$

すなわち、 $\theta \neq n\pi$ (n は整数) のとき

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \quad (73)$$

となる. $\theta = n\pi$ のときは e は一意には定まらないが, 自明な回転変換である. 以上により e および θ と $C^{B/A}$ の関係が求められた.

$C^{B/A}$ を改めて $C^e(\theta)$ と表すと, 式 (69) は次式のように成分表示される.

$$C^e(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta + e_1^2(1 - \cos\theta) & e_3\sin\theta + e_1e_2(1 - \cos\theta) & -e_2\sin\theta + e_1e_3(1 - \cos\theta) \\ -e_3\sin\theta + e_1e_2(1 - \cos\theta) & \cos\theta + e_2^2(1 - \cos\theta) & e_1\sin\theta + e_2e_3(1 - \cos\theta) \\ e_2\sin\theta + e_1e_3(1 - \cos\theta) & -e_1\sin\theta + e_2e_3(1 - \cos\theta) & \cos\theta + e_3^2(1 - \cos\theta) \end{bmatrix} \quad (74)$$

$C^e(\theta)^{-1} = C^e(-\theta) = C^e(\theta)^T$ であることに注意されたい. θ が微小のとき, 式 (74) は次のように近似できる.

$$C^e(\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & e_3\theta & -e_2\theta \\ -e_3\theta & 1 & e_1\theta \\ e_2\theta & -e_1\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (75)$$

また, 回転軸ベクトル e が時間によって変化しない場合, その回転変換を単純回転変換と呼ぶ. $e = [1, 0, 0]^T$, $e = [0, 1, 0]^T$, $e = [0, 0, 1]^T$ とすると各基底ベクトルに対応する単純回転変換となり, 座標変換行列をそれぞれ $C_1(\theta)$, $C_2(\theta)$, $C_3(\theta)$ とすると

$$C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad C_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad C_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

となる. これらは幾何学的にも容易に求められる.

5.2 オイラー回転軸と回転角による角速度表現

オイラー回転軸および回転角と角速度の関係を求める. まず, 式 (57) と同様に $C^{A/B}e = e$ が成り立つ. これを時間微分すると

$$\dot{C}^{A/B}e + C^{A/B}\dot{e} = \dot{e} \quad (77)$$

となる. 式 (77) に左から $C^{B/A}$ を掛け, 式 (42) も考慮すれば

$${}^B\omega^\times e + \dot{e} = C^{B/A}\dot{e} \quad (78)$$

すなわち,

$$e^\times {}^B\omega = (E - C^{B/A})\dot{e} \quad (79)$$

が得られる. ここで, 式 (42) に左から C^{B/A^T} を掛けると

$$\dot{C}^{B/A^T} = C^{B/A^T} {}^B\omega^\times \quad (80)$$

となる. 式 (80) に対して tr をとり, 式 (70) も考慮すれば次式のようなになる.

$$-2\dot{\theta}\sin\theta = \text{tr}\left(C^{B/A^T} {}^B\omega^\times\right) \quad (81)$$

また, 一般に対称行列 S と交代行列 W に対して, $\text{tr}(SW) = \text{tr}(WS) = 0$ であること, および一般にベクトル x, y に対して, $\text{tr}(x^\times y^\times) = -2x^T y$ が成り立つこと (容易に証明可能) を用いれば, 式 (69) から次式が得られる.

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(C^{B/A^T} {}^B\omega^\times\right) &= -\sin\theta \text{tr}\left(e^\times {}^B\omega^\times\right) \\ &= -2\sin\theta e^T {}^B\omega \end{aligned} \quad (82)$$

式 (81), (82) より次式が得られる.

$$\dot{\theta} = e^T {}^B\omega \quad (83)$$

式 (83) は $\omega^{B/A}$ の e 方向平行成分が $\dot{\theta}$ であることを意味している. したがって, $\omega^{B/A}$ の e 方向垂直成分を $\omega_\perp^{B/A}$ ($\omega_\perp^{B/A} = [b]^T {}^B\omega_\perp$) とすると

$${}^B\omega = \dot{\theta}e + {}^B\omega_\perp \quad (84)$$

となる。さて、式 (79) は改めて

$$e^{\times B} \omega_{\perp} = (E - C^{B/A}) \dot{e} \quad (85)$$

と表せる。式 (84) に左から e^{\times} を掛けると、 $e^{\times} e^{\times} = ee^T - E$ (容易に証明可能)、 $e^T B \omega_{\perp} = 0$ であることも用いて

$$-{}^B \omega_{\perp} = e^{\times} (E - C^{B/A}) \dot{e} \quad (86)$$

となる。式 (69) (84), (86) より次式が得られる。

$$\begin{aligned} {}^B \omega &= \dot{\theta} e - e^{\times} \{ (1 - \cos \theta) \cdot E - (1 + \cos \theta) ee^T + \sin \theta e^{\times} \} \dot{e} \\ &= \dot{\theta} e - (1 - \cos \theta) e^{\times} \dot{e} - \sin \theta e^{\times} e^{\times} \dot{e} \\ &= \dot{\theta} e + \sin \theta \dot{e} - (1 - \cos \theta) e^{\times} \dot{e} \\ &= \begin{bmatrix} e_1 \dot{\theta} + \dot{e}_1 \sin \theta - (e_2 \dot{e}_3 - e_3 \dot{e}_2) (1 - \cos \theta) \\ e_2 \dot{\theta} + \dot{e}_2 \sin \theta - (e_3 \dot{e}_1 - e_1 \dot{e}_3) (1 - \cos \theta) \\ e_3 \dot{\theta} + \dot{e}_3 \sin \theta - (e_1 \dot{e}_2 - e_2 \dot{e}_1) (1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (87)$$

ここで、 $e^T \dot{e} = 0$ であることを用いた。式 (87) は特に、単純回転変換の場合は $\dot{e} = 0$ となるので

$${}^B \omega = \dot{\theta} e \quad (88)$$

すなわち、

$$\omega^{B/A} = \dot{\theta} e \quad (89)$$

となる。式 (87) に左から e^{\times} を掛けると

$$e^{\times B} \omega = \{ \sin \theta e^{\times} - (1 - \cos \theta) e^{\times} e^{\times} \} \dot{e} \quad (90)$$

となる。さらに、式 (85) に左から $(1 - \cos \theta) e^{\times} - \sin \theta e^{\times} e^{\times}$ を掛け、 $e^{\times} e^{\times} e^{\times} = -e^{\times}$ であることも考慮すれば

$$\begin{aligned} \{ (1 - \cos \theta) e^{\times} - \sin \theta e^{\times} e^{\times} \} e^{\times B} \omega &= \{ (1 - \cos \theta) e^{\times} - \sin \theta e^{\times} e^{\times} \} \{ \sin \theta e^{\times} - (1 - \cos \theta) e^{\times} e^{\times} \} \dot{e} \\ &= 2(1 - \cos \theta) e^{\times} \dot{e} \end{aligned} \quad (91)$$

となる。式 (91) は次のように整理される。

$$\dot{e} = \frac{1}{2} \left(e^{\times} - \cot \frac{\theta}{2} e^{\times} e^{\times} \right) {}^B \omega \quad (92)$$

式 (83), (87), (92) がオイラー回転軸および回転角と角速度の関係である。

5.3 オイラー角

前述の通り、剛体の回転 (姿勢) は 3 つのパラメータで表現できる。直交座標系 A 系を基準とし、直交座標系 B 系を物体 (剛体) 固定系とすると、 A 系から B 系への座標変換は 3 つの連続した単純回転変換で表現できる。 A 系を基準として、1 回目の座標変換を e_1 軸回りの θ_1 回転 (A 系から A' 系へ変換)、2 回目の座標変換を e_2 軸回りの θ_2 回転 (A' 系から A'' 系へ変換)、3 回目の座標変換を e_3 軸回りの θ_3 回転 (A'' 系から B 系へ変換) とする。 A' 系、 A'' 系について、基底ベクトルをそれぞれ $[\mathbf{a}']^T = [\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3]$ 、 $[\mathbf{a}'']^T = [\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \mathbf{a}''_3]$ とする。このとき次式が成り立つ。

$$[\mathbf{a}'] = C^{A'/A} [\mathbf{a}] \quad (93)$$

$$[\mathbf{a}''] = C^{A''/A'} [\mathbf{a}'] = C^{A''/A'} C^{A'/A} [\mathbf{a}] \quad (94)$$

$$[\mathbf{b}] = C^{B/A''} [\mathbf{a}'] = C^{B/A''} C^{A''/A'} C^{A'/A} [\mathbf{a}] = C^{B/A} [\mathbf{a}] \quad (95)$$

式 (95) 中の ${}^{B/A} C$ を求める。以降、3 つの回転軸 e_i ($i = 1, 2, 3$) をそれぞれ物体固定座標系 A 系、 A' 系、 A'' を基準に選ぶこととする。つまり、 $e_1 = [\mathbf{a}]^T e_1$ 、 $e_2 = [\mathbf{a}']^T e_2$ 、 $e_3 = [\mathbf{a}'']^T e_3$ と表す。すると各座標変換行列は式 (74) の定義を用いて次式のように表せる。

$$C^{A'/A} = C^{e_1}(\theta_1), \quad C^{A''/A'} = C^{e_2}(\theta_2), \quad C^{B/A''} = C^{e_3}(\theta_3) \quad (96)$$

$$C^{B/A} = C^{e_3}(\theta_3) C^{e_2}(\theta_2) C^{e_1}(\theta_1) \quad (97)$$

角速度は式 (52), (89) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{B/A} &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \dot{\theta}_1 [\mathbf{a}]^T \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 [\mathbf{a}']^T \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 [\mathbf{a}'']^T \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (98)$$

と表される. したがって, $\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\mathbf{b}]^T B\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{a}]^T A\boldsymbol{\omega}$ と成分表示するとき, $B\boldsymbol{\omega}$, $A\boldsymbol{\omega}$ はそれぞれ次式のようになる.

$$\begin{aligned}B\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}_1 [\mathbf{b}] [\mathbf{a}]^T \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 [\mathbf{b}] [\mathbf{a}']^T \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 [\mathbf{b}] [\mathbf{a}'']^T \mathbf{e}_3 \\ &= \dot{\theta}_1 C^{e_3}(\theta_3) C^{e_2}(\theta_2) C^{e_1}(\theta_1) \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 C^{e_3}(\theta_3) C^{e_2}(\theta_2) \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 C^{e_3}(\theta_3) \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (99)$$

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}_1 [\mathbf{a}] [\mathbf{a}]^T \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 [\mathbf{a}] [\mathbf{a}']^T \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 [\mathbf{a}] [\mathbf{a}'']^T \mathbf{e}_3 \\ &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 C^{e_1}(\theta_1)^T \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 C^{e_1}(\theta_1)^T C^{e_2}(\theta_2)^T \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (100)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ としてそれぞれ A 系, A' 系, A'' 系の基底ベクトルのいずれかをとることが多い. このとき, それぞれ A 系の i 軸, A' 系の j 軸, A'' 系の k 軸 ($i, j, k = 1, 2, 3$) を選ぶとすると, 任意の回転を表現するためには $i \neq j$, $j \neq k$ でなければならない. したがって軸の選び方は i - j - k (i, j, k が全て異なる場合) または i - j - i ($i \neq j, i = k$ の場合) の 2 種類に分類され, それぞれ 6 通り, 計 12 通りの選び方が存在する. これらの角をオイラー角 (Euler angle) と呼ぶ. 前節のオイラー回転軸や回転角とは異なることに注意されたい. オイラー角を用いる場合, $C^{e_1}(\theta_1)$, $C^{e_2}(\theta_2)$, $C^{e_3}(\theta_3)$ はそれぞれ, 式 (76) の定義を用いて $C_i(\theta_1)$, $C_j(\theta_2)$, $C_k(\theta_3)$ (または $C_i(\theta_3)$) に, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は軸に応じて $[1, 0, 0]^T$ または $[0, 1, 0]^T$ または $[0, 0, 1]^T$ に置き換えて考える.

代表的な例として, 宇宙機の姿勢表現によく用いられる 3-2-1 オイラー角 (図 3) を考える. $\psi = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, $\phi = \theta_3$ とし, それぞれヨー角 (yaw angle, \mathbf{e}_3 軸回り), ピッチ角 (pitch angle, \mathbf{e}_2 軸回り), ロール角 (roll angle, \mathbf{e}_1 軸回り) と呼ぶ. A 系から B 系への座標変換行列は

$$\begin{aligned}C^{B/A} &= C_1(\phi) C_2(\theta) C_3(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (101)$$

であり, 角速度ベクトルの B 系における成分は式 (99) より

$$\begin{aligned}B\boldsymbol{\omega} &= \dot{\psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (102)$$

となる. 式 (102) を逆に解くと, $\boldsymbol{\vartheta} = [\phi, \theta, \psi]^T$ として

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \theta} & -\frac{\cos \phi \sin \theta}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B\omega_1 \\ B\omega_2 \\ B\omega_3 \end{bmatrix}\quad (103)$$

となる. $\theta = \pi/2 + n\pi$ (n は整数) は特異点であることが分かる.

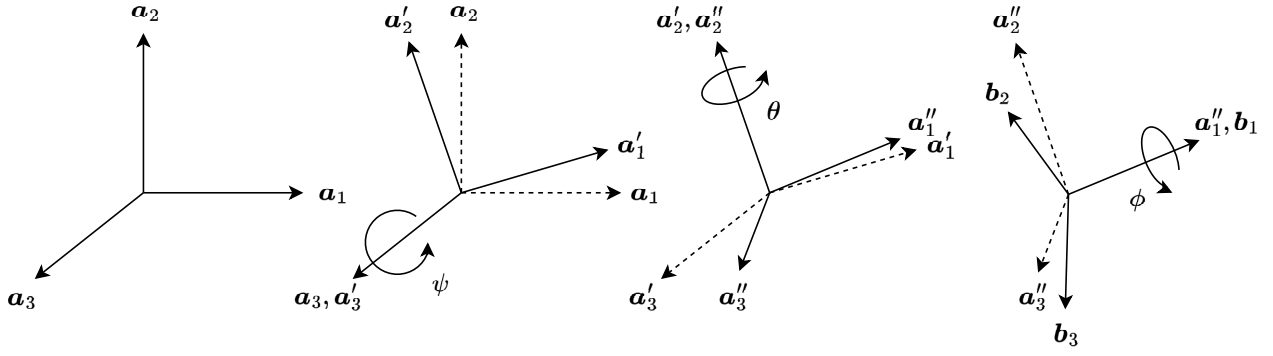


図3 3-2-1 オイラー角による回転変換のイメージ.

5.4 クォータニオン (オイラーパラメータ)

A 系から B 系への座標変換に関するオイラー回転軸 e および回転角 θ に対して, \bar{q} を次のように定義する.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (105)$$

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad q_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (106)$$

ただし,

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (107)$$

が成り立つ. \bar{q} をクォータニオン (quaternion) またはオイラーパラメータ (Euler parameter) と呼ぶ. パラメータの数は4つと冗長であるが, 式 (107) が拘束条件となるので自由度は3である. オイラー角と異なり特異点が存在しないことが利点である. $\cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2) - 1 = 2q_0^2 - 1$, $\sin \theta = 2q_0 \sin(\theta/2)$, $ee^T = qq^T / \sin^2(\theta/2) = qq^T / (1 - q_0^2)$, $e^\times = q^\times / \sin(\theta/2)$ であることに注意すると, 式 (69) から

$$\begin{aligned} C^{B/A} &= (2q_0^2 - 1)E + 2qq^T - 2q_0q^\times \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (108)$$

また, 式 (108) の逆の関係として次式が成り立つ.

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}}{2} \quad (109)$$

$$q_1 = \frac{\text{sgn}(C_{23} - C_{32}) \sqrt{1 + C_{11} - C_{22} - C_{33}}}{2} \quad (110)$$

$$q_2 = \frac{\text{sgn}(C_{31} - C_{13}) \sqrt{1 - C_{11} + C_{22} - C_{33}}}{2} \quad (111)$$

$$q_3 = \frac{\text{sgn}(C_{12} - C_{21}) \sqrt{1 - C_{11} - C_{22} + C_{33}}}{2} \quad (112)$$

角速度は式 (87) より整理すると次式のように表せる.

$${}^B\omega_1 = 2(-q_1\dot{q}_0 + q_0\dot{q}_1 + q_3\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_3) \quad (113)$$

$${}^B\omega_2 = 2(-q_2\dot{q}_0 - q_3\dot{q}_1 + q_0\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_3) \quad (114)$$

$${}^B\omega_3 = 2(-q_3\dot{q}_0 + q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 + q_0\dot{q}_3) \quad (115)$$

すなわち

$${}^B\omega = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (116)$$

となる．式 (107) の時間微分も含めてまとめると

$$\begin{bmatrix} {}^B\omega_1 \\ {}^B\omega_2 \\ {}^B\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (117)$$

となる．式 (117) を逆に解くことで，次のようにクォータニオンの時間微分が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_0 \\ q_0 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_0 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_0 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\omega_1 \\ {}^B\omega_2 \\ {}^B\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\omega_1 \\ {}^B\omega_2 \\ {}^B\omega_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (118)$$

6 おわりに

回転の表現方法は，問題に応じて適切なものを選択する．例えば，姿勢変動が小さいことが分かっている場合は，直感的に理解しやすいオイラー角を用いることも多いが，姿勢変動が大きくなる可能性がある問題では，特異点を回避するためにクォータニオンを用いるのが一般的である．