

# 二体問題

中条 俊大

2023 年 9 月

本資料は東京工業大学の松永三郎教授の講義資料をもとに作成したものです。内容を一部削減し、変数の定義などは一部変更しています。

## 1 はじめに

ある天体の重力の影響下で運動する宇宙機の軌道力学は、二体問題として扱うことができる。二体問題は宇宙ミッションを策定する中で最も重要で基礎的な学問の一つである。本稿では、まず古典的なニュートン力学と万有引力の法則を出発点とし、二体問題を解くために必要な数学的な定式化やそれを解くために理解すべき保存量について述べる。また、特に楕円軌道を表現する方法として軌道六要素を紹介し、任意の時刻における宇宙機の位置・速度と軌道要素の間の変換方法について解説する。最後にケプラーの法則について説明し、関連する重要な公式を示す。

## 2 ニュートンの法則

以下の 3 つの法則をニュートンの法則と呼ぶ。

- 第一法則（慣性の法則）：  
力が作用しない限り、質点は静止するか一定速度で運動する。この法則を満たす座標系を慣性座標系と呼ぶ。
- 第二法則（運動方程式）：  
慣性座標系において、質点の加速度は質点に作用する力に比例し、質点の質量に反比例する。つまり

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}} \quad (1)$$

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

が成り立つ。ただし  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $m$ ,  $\mathbf{r}$  はそれぞれ質点に作用する力、質点の運動量、質量、位置であり、ドットは時間微分を表す。

- 第三法則（作用・反作用の法則）：  
全ての作用には、向きが反対で大きさの等しい反作用が存在する。

## 3 二体問題の定式化

ある天体の重力の影響下における宇宙機の軌道運動を考えると、最も簡単なモデル化はその天体と宇宙機を質点とみなし、両者が互いの万有引力の影響下で運動すると考えることである。これを一般化し 2 つの質点  $m_1$ ,  $m_2$  の運動を考える。図 1 に示す通り、慣性空間におけるある原点に対するそれぞれの位置ベクトルを  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  とし、それぞれに作用する力は互いが引き合う方向で、向きは相対距離のみに依存するとする。ニュートンの第二法則および第三法則から、運動方程式はそれぞれ

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{f} \quad (3)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{f} \quad (4)$$

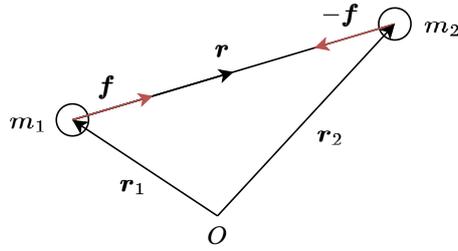


図1 二体問題のイメージ.

と表される. ただし  $f$  は質点  $m_1$  が質点  $m_2$  から受ける力であり,

$$\mathbf{f} = f \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \equiv f \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5)$$

と表される.  $f$  は質点間の相対距離  $r$  の関数であり, この反作用を質点  $m_2$  が受ける.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  は質点  $m_2$  に対する質点  $m_1$  の相対位置ベクトルである. 式 (3), (4) より次式が得られる.

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6)$$

ただし  $r = |\mathbf{r}|$  である. 力のモデルとして, 次式で表されるニュートンの万有引力を導入する.

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (7)$$

$G$  は万有引力定数 ( $6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ) である. 式 (6), (7) より, 質点  $m_2$  に対する質点  $m_1$  の相対運動を表す二体問題の運動方程式は次式ようになる.

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0} \quad (8)$$

ただし  $\mu = G(m_1 + m_2)$  であり, 重力定数と呼ばれる. なお式 (8) で  $\mathbf{r}$  を  $-\mathbf{r}$  に置き換えれば, 質点  $m_1$  に対する質点  $m_2$  の相対運動を表す運動方程式となる. また重力は次式のようにポテンシャル  $V$  を用いて表される.

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (9)$$

$$V = - \frac{\mu}{r} \quad (10)$$

$V$  は無限遠でゼロとなるように定義される.

以降, 質点  $m_2$  をある中心天体 (例えば地球), 質点  $m_1$  を宇宙機とみなして考える. 実際は一般には慣性空間において両者ともに静止せずに運動するが, ここで重要なのは中心天体を原点とする座標系における中心天体周りの宇宙機の相対的な軌道運動であり, 式 (8) はそれを分かりやすく表現するものといえる.

## 4 保存量

二体問題の解は式 (8) を  $\mathbf{r}$  について解くことで得られるが, そのためにまず二体問題の力学的性質を理解することが重要である. ここでは式 (8) を起点に3つの保存量 (時間変化しない物理量) が導かれることを説明する.

### 4.1 角運動量

式 (8) に左から  $\mathbf{r}$  を外積すると

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

となる. また次式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (12)$$

式 (11), (12) より次式が得られる.

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L} \quad (13)$$

ただし  $t$  は時刻,  $\mathbf{L}$  は角運動量と呼ばれる定数ベクトルであり, 式 (13) は角運動量保存則を表す. また式 (13) は  $\mathbf{L}$  が  $\mathbf{r}$  と  $\dot{\mathbf{r}}$  に直交すること, つまり軌道面に直交し, その軌道面は一定であることを意味している.

## 4.2 エネルギー

式 (8) と  $\mathbf{r}$  の内積をすると

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (14)$$

となる. また次式が成り立つ.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} \right) = \frac{\mu}{2\sqrt{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^3}} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mu}{r^3} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) \quad (16)$$

式 (14), (15), (16) より次式が得られる.

$$\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\mu}{r} = h \quad (17)$$

ただし  $h$  は単位質量あたりのエネルギーを表す定数であり, 式 (17) はエネルギー保存則を表す. 左辺第 1 項は運動エネルギー, 第 2 項は万有引力に起因する位置エネルギー (ポテンシャル),  $h$  は全エネルギーに対応する.

## 4.3 ラプラスベクトル

最後に式 (8) に左から式 (13) を外積すると

$$\mathbf{L} \times \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (18)$$

ベクトル三重積の関係式を用いると, 式 (18) は次のように書き換えられる.

$$\mathbf{L} \times \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r} \} = \mathbf{0} \quad (19)$$

また次式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{L} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mu}{r^3} \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r} \} \quad (21)$$

式 (19), (20), (21) より次式が得られる.

$$\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{A} \quad (22)$$

ただし  $\mathbf{A}$  はラプラスベクトルと呼ばれる定数ベクトルである (符号は便宜上負としている).

## 5 円錐曲線

本節ではラプラスベクトルを起点に, 二体問題における軌道が円錐曲線と呼ばれる曲線を表す式で記述できることを示す. またそれがエネルギーに応じて楕円 (円を含む), 放物線, 双曲線のいずれかに分類されることを説明する.

$\mathbf{A}$  と  $\mathbf{r}$  のなす角を  $\theta$  とする. これを真近点角と呼ぶ. このとき  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{r}$  の内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta \quad (23)$$

と表される (ただし  $A = |\mathbf{A}|$  である) が, 式 (22) より

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - \mu r = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{L} - \mu r = L^2 - \mu r \quad (24)$$

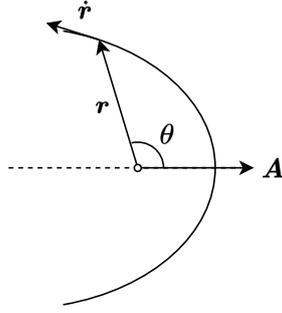


図2 ラプラスベクトルと真近点角および円錐曲線の関係.

となる (ただし  $L = |\mathbf{L}|$  である). 式 (23), (24) より次式が得られる.

$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu}}{1 + \frac{A}{\mu} \cos \theta} \equiv \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (25)$$

ここで

$$e = \frac{A}{\mu} \quad (26)$$

$$p = \frac{L^2}{\mu} \quad (27)$$

をそれぞれ離心率, 半直弦と呼び, 式 (25) が表す曲線を円錐曲線と呼ぶ. 図2に示されるように,  $\mathbf{A}$  の方向は  $\theta = 0$  のとき  $r$  に平行であり, また  $\theta = 0$  のとき  $r$  は最小となる. この点を近点と呼ぶ. つまり  $\mathbf{A}$  は中心天体に対する近点方向を表す. 次に式 (22) より次式が得られる.

$$\begin{aligned} A^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) + 2\mu \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mu^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \\ &= L^2 (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{2\mu}{r} L^2 + \mu^2 \\ &= 2hL^2 + \mu^2 \end{aligned} \quad (28)$$

さらに式 (26), (27), (28) より次式が得られる.

$$p = a(1 - e^2) \quad (29)$$

ただしここでは  $h \neq 0$  と仮定し,

$$a = -\frac{\mu}{2h} \quad (30)$$

とした.

円錐曲線の幾何学的意味について考える. 図2において, 中心天体の位置を原点とし,  $\mathbf{A}$  に平行 (図中右向き) に  $x$  軸, それと直交する方向 (図中上向き) に  $y$  軸をとる座標系を定義する. まず式 (25) と  $x = r \cos \theta$  から

$$r = p - ex \quad (31)$$

となる. 次に式 (29), (31) と  $r^2 = x^2 + y^2$  から次式が得られる.

$$\begin{aligned} y^2 &= (p - ex)^2 - x^2 \\ &= p^2 - 2epx - (1 - e^2)x^2 \\ &= a^2(1 - e^2)^2 - 2ae(1 - e^2)x - (1 - e^2)x^2 \\ &= (1 - e^2) \left\{ a^2 - (x + ae)^2 \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

表 1 円錐曲線の分類.

Orbit	Eccentricity	Energy
Circle	$e = 0$	$h < 0$
Ellipse	$0 < e < 1$	$h < 0$
Parabola	$e = 1$	$h = 0$
Hyperbola	$e > 1$	$h > 0$

式 (32) はさらに次のように書き換えられる.

$$\begin{cases} \frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 & (\text{if } e \neq 1) \\ y^2 = -2p\left(x - \frac{p}{2}\right) & (\text{if } e = 1) \end{cases} \quad (33)$$

したがって, 円錐曲線は離心率の値によって次の 3 つに分類される.

- $0 \leq e < 1$  のとき, 中心が  $(-ae, 0)$ , 長半径 ( $x$  方向) が  $a$ , 短半径 ( $y$  方向) が  $a\sqrt{1-e^2}$  の楕円となる. 原点は焦点となる. また  $h < 0$  である. 特に  $e = 0$  のときは中心が  $(0, 0)$  半径  $a$  の円となる.
- $e = 1$  のとき, 頂点が  $(p/2, 0)$ , 準線が  $x = p$  の放物線となる. 原点は焦点となる. また  $h = 0$  である.
- $e > 1$  のとき, 中心が  $(-ae, 0)$ , 漸近線の傾きが  $\sqrt{e^2-1}$  および  $-\sqrt{e^2-1}$  の双曲線となる. 原点は焦点となる. また  $h > 0$  である.

以上のうち重要項目を表 1 にまとめる. エネルギーの符号に応じて楕円 (円を含む), 放物線, 双曲線のいずれかに分類されることになる. 宇宙機が中心天体の周辺に留まり続ける (周回する) のは楕円軌道の場合のみであり, 放物線または双曲線軌道の場合は宇宙機は時間とともに無限遠に発散する.

## 6 ケプラー方程式

前節では二体問題の解として軌道の形状を求めたが, 本節ではそのうち楕円軌道について, 軌道の位置・速度と時間の関係を表すケプラー方程式の導出とその解法について述べる. これを解けば (楕円軌道の場合の) 二体問題の解が得られたことになる. 放物線および双曲線軌道についてもケプラー方程式は存在するが, 本稿では割愛する.

### 6.1 導出

式 (13) より

$$L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) \quad (34)$$

であり, また式 (17) より

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2h + \frac{2\mu}{r} \quad (35)$$

である. さらに  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$  の両辺を時間で微分すると

$$r\dot{r} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (36)$$

となる. 式 (34), (35), (36) より次式が得られる.

$$L^2 = r^2 \left( 2h + \frac{2\mu}{r} \right) - (r\dot{r})^2 \quad (37)$$

以降, 楕円軌道 ( $h < 0$ ) の場合について考える. まず式 (37) より次式が得られる.

$$r\dot{r} = \pm \sqrt{-2h} \sqrt{-\left(r + \frac{\mu}{2h}\right)^2 + \frac{L^2}{2h} + \left(\frac{\mu}{2h}\right)^2} \quad (38)$$

また式 (28) を変形すると次式が導かれる。

$$\frac{L^2}{2h} + \left(\frac{\mu}{2h}\right)^2 = \left(\frac{A}{2h}\right)^2 \quad (39)$$

式 (38), (39) から次式が得られる。

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= \pm\sqrt{-2h}\sqrt{\left(\frac{A}{2h}\right)^2 - \left(r + \frac{\mu}{2h}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \pm\sqrt{-2h}dt &= \frac{rdr}{\sqrt{\left(\frac{A}{2h}\right)^2 - \left(r + \frac{\mu}{2h}\right)^2}} \end{aligned} \quad (40)$$

ここで

$$\frac{A}{2h} \cos E = r + \frac{\mu}{2h} \quad (41)$$

で定義される  $E$  を離心近点角と呼ぶ。式 (41) による置換で式 (40) はさらに次のように書き換えられ、積分できる。

$$\pm\sqrt{-2h}dt = \left(\frac{A}{2h} \cos E - \frac{\mu}{2h}\right) dE \quad (42)$$

$$\therefore \pm\sqrt{-2h}(t - t_p) = \frac{A}{2h} \sin E - \frac{\mu}{2h} E \quad (43)$$

ただし  $t_p$  は近点通過時刻と呼ばれる積分定数である。式 (26), (30) より、式 (43) は次式のように書き換えられる。

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = E - e \sin E \quad (44)$$

左辺の符号は正号のみとったが、一般性を失わないことに注意されたい。式 (44) を楕円軌道におけるケプラー方程式と呼ぶ。ケプラー方程式は離心近点角を介して時刻と位置を対応させるものである（速度も必然的に求まる）。なお式 (26), (30) より、式 (41) は次式のようにも表される。

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (45)$$

その幾何学的意味を、真近点角とあわせて図 3 に示す。離心近点角は、楕円上の点を外接円上に長軸に対する垂線を共有するように射影したとき、近点に対して射影点がなす楕円の中心の周りの角度である。  $t = t_p$  のとき  $E = 0$  となるが、式 (45) より  $E = 0$  は  $r$  が最小となること、すなわち近点に対応することが分かる。  $t_p$  を近点通過時刻と呼ぶのはこのためである。さらに次式で定義される平均近点角  $M$  を導入する。

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = n(t - t_p) \quad (46)$$

ただし

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (47)$$

を平均運動と呼ぶ。式 (46) より式 (44) は次のようにも表せる。

$$M = E - e \sin E \quad (48)$$

前述のようにこれとは別に放物線軌道や双曲線軌道におけるケプラー方程式も存在するが、同様の手順で導出できる。

## 6.2 解法

ケプラー方程式 (式 (44)) および式 (41) を用いれば、宇宙機の任意の位置・速度に対応する時刻を求めることができる。逆に任意の時刻における宇宙機の位置・速度を求めるためには、まず式 (44) を離心近点角について解く必要があるが、解析的に解くことはできない。一般的には以下で説明するニュートン・ラプソン法より数値的に解を得る。

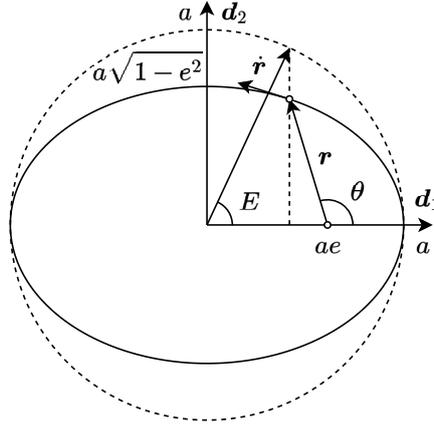


図3 離心近点角と真近点角.

式 (43) を  $E$  について解くことは

$$f(E) = E - e \sin E - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) \quad (49)$$

で定義される関数  $f(E)$  に対して,  $f(E) = 0$  を解くことと同値である. ここで  $f(E)$  をある推定解  $E_k$  周りで 1 次近似すると次式のようなになる.

$$\begin{aligned} f(E) &\approx f(E_k) + \left. \frac{df}{dE} \right|_{E_k} (E - E_k) \\ &= E_k - e \sin E_k - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) + (1 - e \cos E_k) (E - E_k) \end{aligned} \quad (50)$$

したがって 1 次近似の範囲では

$$E \approx \frac{e(\sin E_k - E_k \cos E_k) + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p)}{1 - e \cos E_k} \quad (51)$$

となる. 式 (51) は推定解  $E_k$  から真の解に近づくより良い近似解を求めるものと解釈することができる. この近似解を新たな推定解  $E_{k+1}$  とすれば, 式 (51) によりさらに良い推定解  $E_{k+2}$  を得ることができる. この手順を 1 つ目の推定解  $E_1$  を出発点として繰り返せば, いずれ真の解に十分に近づくことが期待される. 一般にこの手順はある微量  $\varepsilon$  に対して

$$|E_{k+1} - E_k| < \varepsilon \quad (52)$$

が満たされるまで繰り返し, これが満たされれば  $E_{k+1}$  を数値的な解として計算を終了する. ニュートン・ラプソン法により適切に解が得られるためには 1 つ目の推定解  $E_1$  が真の解にある程度近い値である必要があり, ケプラー方程式を解く場合は離心近点角はおおよそ平均近点角に近いと仮定し

$$E_1 = M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) \quad (53)$$

を用いることが多い.

## 7 軌道六要素

三次元空間におけ宇宙機の軌道運動は 6 自由度であるため, 6 つのパラメータがあれば一意に表現できる. 楕円軌道に関して, カルテシアン (ある  $x$ - $y$ - $z$  直交座標系における  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ) とは異なる代表的な表現方法が軌道六要素である. カルテシアンでは全てのパラメータが時間変化する一方, 軌道六要素では, (質点間の万有引力以外の力がなければ) 6 つのうち 5 つの要素は時間変化しない定数で 3 次元空間における軌道面と楕円の形状を決めるものであり, 残りの 1 つの要素のみが時間変化する. この時間変化する要素の選び方は複数あるが, 代表的には真近点角または離心近点角を用いる. 軌道六要素は次の通りまとめられる.

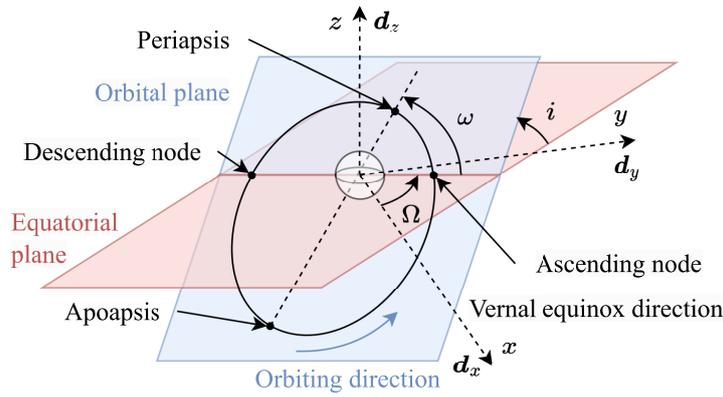


図4 軌道傾斜角と昇交点赤経および近点引数.

- 軌道長半径 ( $a$ )
- 軌道離心率 ( $e$ )
- 軌道傾斜角 ( $i$ )
- 昇交点赤経 ( $\Omega$ )
- 近点引数 ( $\omega$ )
- 真近点角 ( $\theta$ ) または離心近点角 ( $E$ ) または平均近点角 ( $M$ )

軌道長半径, 軌道離心率, 真近点角, 離心近点角および平均近点角は前節までに定義されているが, 軌道長半径と軌道離心率はある定められた軌道面上で楕円の形状を決め, 真近点角, 離心近点角および平均近点角はその楕円上における宇宙機の位置 (および速度) を決めるものである. 一方, 軌道傾斜角, 昇交点赤経, 近点引数は慣性座標系におけるその軌道面を決める.

ここでいう慣性座標系とは, 中心天体が地球の場合は地球中心慣性座標 (Earth-Centered Inertial, ECI) 系である. 原点を地球の質量中心にとり, 典型的な ECI 系では  $xy$  面を赤道面に,  $x$  軸を春分点方向,  $z$  軸を  $xy$  面に垂直な北極点方向,  $y$  軸を右手系を成すようにとる. 地球自身の公転運動ため厳密には慣性系ではないが, 地球近傍の宇宙機の運動を記述するには十分である. また実際は太陽や月の重力の影響で赤道面が不規則な運動を生じる (自転軸の歳差, 章動運動) ため, 2000 年 1 月 1 日正午 (UTC) における赤道面を基準にした座標系が採用される.

軌道傾斜角, 昇交点赤経, 近点引数は軌道面と赤道面および春分点方向の幾何学関係を決めるものとして定義される. 図 4 を参照されたい. まず軌道と赤道面の交点のうち, 南から北へ運動する際に交わる点を昇交点, 北から南へ運動する際に交わる点を降交点と呼ぶ. 軌道傾斜角は降交点から昇交点に向かう方向ベクトルを回転軸として考えた場合の, 赤道面に対する軌道面の回転角であり, 0 deg から 180 deg までの範囲で定義される. 0 deg から 90 deg までの軌道を順行軌道, 90 deg から 180 deg までの軌道を逆行軌道と呼ぶ. 昇交点赤経は赤道面内における中心天体を基準とした春分点方向に対する昇交点の角度であり, 赤道面に直交する北向きの方向 (ECI 系では  $z$  軸方向) の回転を正とする. 最後に近点引数は軌道面内における中心天体を基準とした昇交点に対する近点の角度であり, 軌道進行方向を正として定義される.

## 7.1 軌道六要素の計算

ここでは楕円軌道について, 時刻  $t$  における位置  $\mathbf{r}$  および速度  $\dot{\mathbf{r}}$  が与えられたときの軌道六要素の求め方について述べる. 各要素が  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  および慣性座標系の基底ベクトルで表せればよい. ここでは中心天体が地球の場合を考え, ECI 系の基底ベクトル ( $x, y, z$  軸方向の単位ベクトル) をそれぞれ  $\mathbf{d}_x$ ,  $\mathbf{d}_y$ ,  $\mathbf{d}_z$  とする (図 4). 当然, 中心天体が地球以外の場合も適切に慣性系を定義すれば同様に考えることができる.

まず軌道長半径については式 (17), (30) から求められ, 軌道離心率は式 (13), (22), (26) から, あるいは式 (13) および式 (27), (29) から導かれる

$$e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{\mu a}} \quad (54)$$

から求められる。また

$$\mathbf{d}_L = \frac{\mathbf{L}}{L} \quad (55)$$

と定義する。\$\mathbf{d}\_z\$ と \$\mathbf{d}\_L\$ のなす角が \$i\$ であることから、軌道傾斜角は

$$i = \cos^{-1}(\mathbf{d}_z \cdot \mathbf{d}_L) \quad (56)$$

と表される。また昇交点方向の単位ベクトルを \$\mathbf{d}\_a\$ とすると

$$\mathbf{d}_a = \cos \Omega \mathbf{d}_x + \sin \Omega \mathbf{d}_y \quad (57)$$

であり、これと直交する

$$\mathbf{d}_b = \mathbf{d}_z \times \mathbf{d}_a = -\sin \Omega \mathbf{d}_x + \cos \Omega \mathbf{d}_y \quad (58)$$

を定義すると、\$\mathbf{d}\_a\$ と \$\mathbf{d}\_L\$ が直交することから次式が成り立つ。

$$\cos \Omega (\mathbf{d}_x \cdot \mathbf{d}_L) + \sin \Omega (\mathbf{d}_y \cdot \mathbf{d}_L) = 0 \quad (59)$$

さらに \$\mathbf{d}\_b\$ と \$\mathbf{d}\_L\$ のなす角が \$i + \pi/2\$ であることから次式が成り立つ。

$$-\sin \Omega (\mathbf{d}_x \cdot \mathbf{d}_L) + \cos \Omega (\mathbf{d}_y \cdot \mathbf{d}_L) = -\sin i \quad (60)$$

式 (59), (60) より

$$\mathbf{d}_x \cdot \mathbf{d}_L = \sin i \sin \Omega \quad (61)$$

$$\mathbf{d}_y \cdot \mathbf{d}_L = -\sin i \cos \Omega \quad (62)$$

が得られる。したがって式 (61), (62) より昇交点赤経は次式のように表される。

$$\Omega = \text{atan2}\{\mathbf{d}_x \cdot \mathbf{d}_L, -(\mathbf{d}_y \cdot \mathbf{d}_L)\} \quad (63)$$

次に式 (25), (29) から真近点角 \$\theta\$ を求めることができる。ただし \$0 \leq \cos^{-1} \phi \leq \pi\$ (\$\phi\$ は任意の実数) であることから宇宙機の位置 (ベクトルと速度ベクトルの幾何学関係) による場合分けが必要であり、

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1} \left\{ \frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e} \right\} & (\text{if } \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1} \left\{ \frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e} \right\} & (\text{if } \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \leq 0) \end{cases} \quad (64)$$

と書ける。また式 (45) より離心近点角が求められるが、これも場合分けが必要であり次のように書ける。

$$E = \begin{cases} \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} - \frac{r}{ae} \right) & (\text{if } \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} - \frac{r}{ae} \right) & (\text{if } \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \leq 0) \end{cases} \quad (65)$$

平均近点角は式 (48), (65) により求められる。最後に近点引数は次の手順で求められる。まず近点方向の単位ベクトルを \$\mathbf{d}\_1\$、および軌道面内でそれと直交する単位ベクトルを \$\mathbf{d}\_2\$ と定義する (図 3) と

$$\mathbf{d}_1 = \cos \omega \mathbf{d}_a + \sin \omega (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a) \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= \mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_1 \\ &= \cos \omega (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a) - \sin \omega \mathbf{d}_a \end{aligned} \quad (67)$$

である。ここで \$\mathbf{r}\$ を \$\mathbf{d}\_1, \mathbf{d}\_2\$ を用いて表すことで次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \cos \theta \mathbf{d}_1 + r \sin \theta \mathbf{d}_2 \\ &= r (\cos \theta \cos \omega - \sin \theta \sin \omega) \mathbf{d}_a + r (\sin \theta \cos \omega + \cos \theta \sin \omega) (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a) \\ &= r \cos (\theta + \omega) \mathbf{d}_a + r \sin (\theta + \omega) (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a) \end{aligned} \quad (68)$$

式 (68) と  $\mathbf{d}_a$  および  $\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a$  の内積をすると

$$\cos(\theta + \omega) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_a}{r} \quad (69)$$

$$\sin(\theta + \omega) = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a)}{r} \quad (70)$$

が得られる。したがって式 (69), (70) より, 近点引数は次式のように表される。

$$\omega = \text{atan2}\{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a), \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_a\} - \theta \quad (71)$$

## 7.2 位置・速度の計算

ここでは逆に軌道六要素が与えられたときの位置  $\mathbf{r}$  および速度  $\dot{\mathbf{r}}$  の求め方について述べる。時間変化する要素として真近点角を用いることを前提とする。離心近点角が与えられた場合は式 (25), (27), (45) を用いれば対応する真近点角が得られる。平均近点角が与えられた場合はケプラー方程式を解き離心近点角を求め, 同様に真近点角に変換すればよい。以降, 真近点角を含む軌道六要素および慣性座標系の基底ベクトルを用いて  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  を表すことを考える。

まず式 (25),(27) から  $r$  が得られる。改めて書くと

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (72)$$

である。次に式 (56), (61), (62) より

$$\mathbf{d}_L = \sin i \sin \Omega \mathbf{d}_x - \sin i \cos \Omega \mathbf{d}_y + \cos i \mathbf{d}_z \quad (73)$$

となる。したがって式 (68) に式 (57), (72), (73) を代入すれば  $\mathbf{r}$  が求められる。また式 (68) を時間微分すると次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{r}} = \left\{ \dot{r} \cos(\theta + \omega) - r \dot{\theta} \sin(\theta + \omega) \right\} \mathbf{d}_a + \left\{ \dot{r} \sin(\theta + \omega) + r \dot{\theta} \cos(\theta + \omega) \right\} (\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_a) \quad (74)$$

ここで  $\mathbf{d}_r$  を  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトル,  $\mathbf{d}_\theta$  を軌道面内でそれと直交する ( $\theta$  方向を正とする) 方向の単位ベクトルとすると

$$\mathbf{r} = r \mathbf{d}_r \quad (75)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{d}_r + r \dot{\theta} \mathbf{d}_\theta \quad (76)$$

と表せるが, 式 (13), (75), (76) より次式が得られる。

$$\mathbf{L} = r \mathbf{d}_r \times (\dot{r} \mathbf{d}_r + r \dot{\theta} \mathbf{d}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \mathbf{d}_L \quad (77)$$

つまり

$$L = r^2 \dot{\theta} \quad (78)$$

である。一方, 式 (27), (29) より

$$L = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (79)$$

であるから, 式 (78), (79) より次式が得られる。

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{r^2} \quad (80)$$

さらに式 (72) を時間微分して式 (80) を代入すると

$$\dot{r} = \frac{ae\dot{\theta}(1 - e^2) \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{er^2 \dot{\theta} \sin \theta}{a(1 - e^2)} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} e \sin \theta \quad (81)$$

となる。したがって式 (74) と式 (57), (72), (73), (80), (81) から  $\dot{\mathbf{r}}$  が求められる。

## 8 ケプラーの法則

以下の3つの法則をケプラーの法則と呼ぶ。

- 第一法則:  
惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道上を運動する。
- 第二法則:  
惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間あたりに描く面積（面積速度）は一定である。
- 第三法則:  
惑星の公転周期の2乗は軌道長半径の3乗に比例する。

これらは太陽の周りを公転する惑星の軌道を太陽を中心天体とする二体問題でモデル化すれば説明できる。これまでの議論では主に中心天体を地球、その周りを運動する物体を宇宙機として考えていたが、中心天体を太陽、その周りを運動する物体を各惑星に置き換えて考えればよい。以降、ケプラーの法則の導出について説明し、関連する重要な公式を示すが、当然それらは逆に地球を中心天体としその周り（楕円軌道）を周回する宇宙機の運動にも適用できる。

まず第一法則については、二体問題で考える限り惑星の公転軌道が太陽を焦点（の一つ）とする楕円となることはこれまでの議論で示される。その軌道は式 (25) ( $0 \leq e < 1$ ) で表され、これと式 (29) から近点 ( $\theta = 0$ ) 距離  $r_p$  および遠点 ( $\theta = \pi$ ) 距離  $r_a$  はそれぞれ次のように表される。

$$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \quad (82)$$

$$r_a = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \quad (83)$$

また式 (82), (83) より離心率は近点距離と遠点距離を用いて次のように表せる。

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (84)$$

次に第二法則について考える。微小時間において惑星と太陽を結ぶ線分が描く面積を  $\Delta S$  とすると、 $r$  と  $\theta$  の微小変化量（それぞれ  $\Delta r$ ,  $\Delta\theta$ ）を用いて次のように表せる。

$$\Delta S = \frac{1}{2}r(r\Delta\theta) \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \quad (85)$$

面積速度は  $S$  の時間微分であり、式 (85) から次のように表せる。

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}L \quad (86)$$

となる。ここで式 (78) を考慮した。角運動量は保存量であるため面積速度は一定であることが示された。第二法則と角運動量保存則は同値であるともいえる。

最後に第三法則の導出について説明する。まず式 (44) を時間微分して整理すると次式が得られる。

$$\dot{E} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}}{1 - e \cos E} \quad (87)$$

式 (87) を軌道一周分積分する。軌道の周期を  $T$  とすれば、 $E$  に関する積分区間は  $[0, 2\pi]$ ,  $t$  に関する積分区間は  $[0, T]$  であることに注意すると

$$\int_0^T dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E) dE \quad (88)$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (89)$$

となる。したがって

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad (90)$$

である。  $\mu = G(m_1 + m_2)$  (ここでは  $m_1$  が太陽の質量,  $m_2$  が各惑星の質量) の値は惑星によって異なるが, 各惑星の質量に比べて太陽の質量が十分大きい ( $m_1 \gg m_2$ ) ため,  $\mu$  は惑星によらずほぼ一定であるとみなせる。このとき, 式 (90) は惑星の公転周期の 2 乗が軌道長半径の 3 乗におおよそ比例することを示している。

## 9 おわりに

現実的には, 宇宙機には中心天体の重力以外の力 (第三天体の重力や太陽輻射圧, 地球周回軌道であれば大気抵抗) も作用する上に, 軌道によっては中心天体の不均一な重力場による影響 (単一の質点ではモデル化できない重力高次項) も無視できない場合がある。しかしこうした場合でも本稿で扱った基本的な二体問題はミッション設計の基礎検討として用いることが多く, 非常に有用である。また本稿ではあくまで宇宙機の自然運動に着目したが, 特に軌道制御を伴うミッションでは, その中でミッション要求を満足する軌道をいかに設計・制御できるかが重要となる。

## 参考文献

1. 狼, 富田, 中須賀, 松永, 宇宙ステーション入門 第 2 版補訂版, 東京大学出版, 2014.
2. 姿勢制御研究委員会編, 人工衛星の力学と制御ハンドブック, 培風館, 2007.
3. 木田, 小松, 川口, 人工衛星と宇宙探査機, コロナ社, 2001.
4. 半揚, ミッション解析と軌道設計の基礎, 現代数学社, 2014.