

ランベール問題

中条 俊大

2023 年 12 月

本資料は東京工業大学の松永三郎教授の講義資料をもとに作成したものです。内容を一部削減し、変数の定義などは一部変更しています。

1 はじめに

二体問題において、任意の初期位置から任意の終端位置に任意の時間をかけて到達するのに必要な初期速度を求める問題をランベール問題と呼ぶ。ランベール問題を解くことは、特に惑星間ミッション設計の基礎的な解析に有用である。本稿では、まずそれに必要な F 関数と G 関数およびユニバーサル関数について述べ、その後ランベール問題の具体的な定義と解法について説明する。基本的に「二体問題」の議論を引き継ぐため、本稿で新たに定義する変数以外の定義は「二体問題」を参照されたい。

2 F 関数と G 関数

2.1 定義と準備

二体問題において宇宙機の運動は軌道面内に制限されるため、軌道面内の任意のベクトルは同平面内の平行でない 2 つのベクトルの線形和で表現できる。ここでその 2 つのベクトルとして初期時刻における位置（初期位置）ベクトルと速度（初期速度）ベクトルをとることとする。すなわち

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 F + \dot{\mathbf{r}}_0 G \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 \dot{F} + \dot{\mathbf{r}}_0 \dot{G} \quad (2)$$

と表せる。ただし $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ はそれぞれ初期位置ベクトル、初期速度ベクトルであり（ $\dot{\mathbf{r}}_0$ は定数ベクトル $\mathbf{r}_0$ の時間微分ではなく $\dot{\mathbf{r}}$ の初期値、すなわち定数ベクトルであることに注意）、 F , G はいずれも $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$, および時刻（または真近点角または離心近点角）の関数である。

ここで位置、速度を基底ベクトル $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ を用いて表すことを考える。

$$\mathbf{r} = l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2 \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{l}_1 \mathbf{d}_1 + \dot{l}_2 \mathbf{d}_2 \quad (4)$$

l_1 , l_2 , $\dot{l}_1$, $\dot{l}_2$ は次のように真近点角を用いて表現できる。まず幾何学的に明らかに

$$l_1 = r \cos \theta, \quad l_2 = r \sin \theta \quad (5)$$

である。また「二体問題」の式 (25), (29), (80), (81) から

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \quad (7)$$

である。よって式 (5) を時間微分して式 (6), (7) を代入し、整理すると

$$\dot{l}_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \theta, \quad \dot{l}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos \theta) \quad (8)$$

が得られる。一方、楕円軌道を仮定すれば $l_1, l_2, \dot{l}_1, \dot{l}_2$ は離心近点角を用いても表現できる。「二体問題」の式 (44), (45) とそれらの時間微分および「二体問題」の式 (72), (81) から

$$\cos \theta = \frac{a}{r} (\cos E - e) \quad (9)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{ap}}{r} \sin E \quad (10)$$

が得られる。よって式 (5), (8), (9), (10) から次式が得られる。

$$l_1 = a (\cos E - e), \quad l_2 = \sqrt{ap} \sin E \quad (11)$$

$$\dot{l}_1 = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \sin E, \quad \dot{l}_2 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cos E \quad (12)$$

さて、式 (3), (4) において時刻を初期時刻 t_0 とすると

$$\mathbf{r}_0 = l_{10} \mathbf{d}_1 + l_{20} \mathbf{d}_2 \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{l}_{10} \mathbf{d}_1 + \dot{l}_{20} \mathbf{d}_2 \quad (14)$$

となる。 $l_{10}, l_{20}, \dot{l}_{10}, \dot{l}_{20}$ はそれぞれ時刻 t_0 における $l_1, l_2, \dot{l}_1, \dot{l}_2$ である。また式 (13), (14) は次のように書き直せる。

$$\mathbf{d}_1 = \frac{\dot{l}_{20} \mathbf{r}_0 - l_{20} \dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\mu p}} \quad (15)$$

$$\mathbf{d}_2 = \frac{-\dot{l}_{10} \mathbf{r}_0 + l_{10} \dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\mu p}} \quad (16)$$

ここで

$$l_{10} \dot{l}_{20} - l_{20} \dot{l}_{10} = \sqrt{\mu p} \quad (17)$$

となることを用いた。式 (15), (16) を式 (3), (4) に代入し、式 (1), (2) と比較すれば、 F 関数、 G 関数およびそれらの時間微分は次のように表される。

$$F = \frac{\dot{l}_{20} l_1 - \dot{l}_{10} l_2}{\sqrt{\mu p}}, \quad G = \frac{-l_{20} \dot{l}_1 + l_{10} \dot{l}_2}{\sqrt{\mu p}} \quad (18)$$

$$\dot{F} = \frac{\dot{l}_{20} \dot{l}_1 - \dot{l}_{10} \dot{l}_2}{\sqrt{\mu p}}, \quad \dot{G} = \frac{-\dot{l}_{20} \ddot{l}_1 + \dot{l}_{10} \ddot{l}_2}{\sqrt{\mu p}} \quad (19)$$

なお

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (F \dot{G} - G \dot{F}) (\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0) \quad (20)$$

と角運動量保存則より

$$F \dot{G} - G \dot{F} = 1 \quad (21)$$

が成り立つ。

2.2 真近点角の変化量による表示

F 関数、 G 関数およびそれらの時間微分は真近点角の変化量を用いて次式のように表される。

$$F = 1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \Delta \theta), \quad G = \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Delta \theta \quad (22)$$

$$\dot{F} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\sin \Delta \theta} \left(\frac{1 - \cos \Delta \theta}{p} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad \dot{G} = 1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \Delta \theta) \quad (23)$$

ただし $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ であり、 θ_0 を初期時刻における真近点角として

$$\Delta \theta = \theta - \theta_0 \quad (24)$$

とした。 $F, G, \dot{G}$ は式 (5), (8), (18), (19), (24) および「二体問題」の式 (25) から容易に求められる。 $\dot{G}$ はそれらの結果と式 (21) から求めるのが簡単である。

2.3 離心近点角の変化量による表示

同様に F 関数, G 関数およびそれらの時間微分は離心近点角の変化量を用いて次式のように表される.

$$F = 1 - \frac{a}{r_0} (1 - \cos \Delta E), \quad G = -\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1 - \cos \Delta E}{\sin \Delta E} \left(1 - \cos \Delta E - \frac{r + r_0}{a} \right) \quad (25)$$

$$\dot{F} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r r_0} \sin \Delta E, \quad \dot{G} = 1 - \frac{a}{r} (1 - \cos \Delta E) \quad (26)$$

ただし E_0 を初期時刻における離心近点角として

$$\Delta E = E - E_0 \quad (27)$$

とした. F , $\dot{F}$, $\dot{G}$ は式 (11), (12), (18), (19), (27) および「二体問題」の式 (45) から容易に求められる. G はそれらの結果と式 (21) から求めるのが簡単である.

2.4 ユニバーサル変数による表示

離心近点角による表示は楕円軌道を前提としていたが, ユニバーサル変数を用いれば楕円軌道だけでなく放物線軌道, 双曲線軌道でも普遍的に成立する表示ができる. まず次式で表される S 関数および C 関数を定義する.

$$S(z) \equiv \frac{1}{3!} - \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{7!} - \dots$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z})^3} & (z > 0) \\ \frac{1}{6} & (z = 0) \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z}}{(\sqrt{-z})^3} & (z < 0) \end{cases} \quad (28)$$

$$C(z) \equiv \frac{1}{2!} - \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \dots$$

$$= \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} & (z > 0) \\ \frac{1}{2} & (z = 0) \\ \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{-z} & (z < 0) \end{cases} \quad (29)$$

次に

$$\alpha = \frac{1}{a} \quad (30)$$

と表される変数 α を定義する. 楕円軌道の場合 $\alpha > 0$, 放物線軌道の場合 $\alpha = 0$, 双曲線軌道の場合 $\alpha < 0$ である.

以降, まず楕円軌道の場合を考える.

$$s = \frac{\Delta E}{\sqrt{\alpha}} \quad (31)$$

と表される変数 s を定義すると, 式 (31) から

$$\begin{aligned} \cos \Delta E &= 1 - \frac{\alpha s^2}{2!} + \frac{\alpha^2 s^4}{4!} - \frac{\alpha^3 s^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \alpha s^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{\alpha s^2}{4!} + \frac{\alpha^2 s^4}{6!} - \dots \right) \\ &= 1 - \alpha s^2 C(\alpha s^2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sin \Delta E &= \sqrt{\alpha} s - \frac{\sqrt{\alpha^3} s^3}{3!} + \frac{\sqrt{\alpha^5} s^5}{5!} - \dots \\ &= \sqrt{\alpha} s \{ 1 - \alpha s^2 S(\alpha s^2) \} \end{aligned} \quad (33)$$

が成り立つ。式 (25), (26), (30), (32), (33) より, F 関数と G 関数は S 関数と C 関数を用いて次のように表現できる。

$$F = 1 - \frac{s^2}{r_0} C(\alpha s^2), \quad G = -\frac{s}{\sqrt{\mu} \{1 - \alpha s^2 S(\alpha s^2)\}} C(\alpha s^2) \{s^2 C(\alpha s^2) - (r + r_0)\} \quad (34)$$

$$\dot{F} = -\frac{\sqrt{\mu}}{rr_0} s \{1 - \alpha s^2 S(\alpha s^2)\}, \quad \dot{G} = 1 - \frac{s^2}{r} C(\alpha s^2) \quad (35)$$

これがユニバーサル変数による表示である。なお「二体問題」の式 (44), (45) と $dE = d(\Delta E)$ から

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{dt}{dE} = 1 - e \cos E = \frac{r}{a} \quad (36)$$

$$\therefore r = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{dt}{d(\Delta E)} \quad (37)$$

が得られる。さらに式 (30), (31), (37) より次式が得られる。

$$r = \sqrt{\mu \alpha} \frac{dt}{d(\sqrt{\alpha} s)} = \sqrt{\mu} \frac{dt}{ds} \quad (38)$$

$$\therefore \frac{dt}{ds} = \frac{r}{\sqrt{\mu}}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{\mu}}{r} \quad (39)$$

式 (39) で表される t から s への変換をスンドマン変換と呼ぶ。離心近点角を介さないことに注意されたい。

式 (34), (35), (39) の立式は楕円軌道の場合を前提として行ったが、楕円に限らず放物線 ($\alpha = 0$), 双曲線 ($\alpha < 0$) の場合も同様に成り立つことが知られている。

2.5 ケプラー方程式の拡張

初期時刻 t_0 , 初期位置 $\mathbf{r}_0$, 初期速度 $\dot{\mathbf{r}}_0$, および任意の時刻 t が与えられたとき, 時刻 t における位置 $\mathbf{r}$ と速度 $\dot{\mathbf{r}}$ を求める問題を考える。 F 関数と G 関数およびそれらの時間微分が求まればよいが, そのためには $\Delta\theta$ (式 (22), (23) を用いる) または ΔE (式 (25), (26) を用いる) または s (式 (34), (35) を用いる) のいずれかが必要である。 ΔE を用いる (式 (25), (26) を用いる) 場合は楕円軌道に限定されることに注意されたい。なお加えて r , a (または α), e , p も必要になるが, これらのうち a (または α), e , p については $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ と「二体問題」の式 (13), (17), (29), (30), (54) から求められる。 r については後述するが, ここまでで得られている変数から求めることができる。すなわち t と $\Delta\theta$ または ΔE または s の関係式を求め, それを $\Delta\theta$ または ΔE または s について解けばよい。 t と ΔE および s の関係式については, それぞれ以下に述べるようにケプラー方程式を拡張することで求めることができる。 t と $\Delta\theta$ の直接的な関係式はなく, 一度 ΔE を介して $\Delta\theta$ が求められることになるのでここでは扱わない。

まず t と ΔE の関係式を導出する。「二体問題」の式 (44) より次式が得られる。

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - e \cos E) dE \quad (40)$$

式 (40) を $t: t_0 \rightarrow t$, $E: E_0 \rightarrow E$ の区間で積分すると

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \{E - E_0 - e(\sin E - \sin E_0)\} \quad (41)$$

となる。ここで式 (27) に注意すると

$$\sin E - \sin E_0 = \sin(E_0 + \Delta E) - \sin E_0 = \sin E_0 (\cos \Delta E - 1) + \cos E_0 \sin \Delta E \quad (42)$$

が成り立つ。また「二体問題」の式 (26), (30), (36), (40) を時刻 t_0 に適用したものから次式が得られる。

$$\sin E_0 = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{e\sqrt{\mu a}} \quad (43)$$

さらに「二体問題」の式 (45) を時刻 t_0 に適用し整理すると次式が得られる.

$$\cos E_0 = \frac{1 - \frac{r_0}{a}}{e} \quad (44)$$

式 (27), (41), (42), (43), (44) より, t と ΔE の関係式が次のように導かれる.

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left\{ \Delta E - \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) \sin \Delta E + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\mu a}} (1 - \cos \Delta E) \right\} \quad (45)$$

式 (45) を ΔE について解くには数値計算が必要であり, ケプラー方程式と同様にニュートン・ラプソン法が有効である. 初期推定解としては例えば $\Delta E = n(t - t_0)$ が有用である. 最後に, ΔE が求まれば r も求められる. 式 (37), (45) より次式が得られる.

$$r = a \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) \cos \Delta E + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\mu a}} \sin \Delta E \right\} \quad (46)$$

以上により ΔE を用いて F 関数および G 関数を求めることができる.

次に t と s の関係式を導出する. 楕円軌道を前提とすれば, 式 (30), (31), (32), (33), (45) より次式が導かれる.

$$t - t_0 = \frac{s}{\sqrt{\mu}} \left\{ r_0 + s^2 (1 - r_0 \alpha) S(\alpha s^2) + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\mu}} s C(\alpha s^2) \right\} \quad (47)$$

式 (47) にもニュートン・ラプソン法は有効である. 初期推定解としては例えば $s = 0$ ($t = t_0$ に対応) が用いられる. また s が求まれば r も求められる. 式 (30), (32), (33), (46) より次式が得られる.

$$r = r_0 + s^2 (1 - r_0 \alpha) C(\alpha s^2) + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\mu}} s \{1 - \alpha s^2 S(\alpha s^2)\} \quad (48)$$

以上により s を用いて F 関数および G 関数を求めることができる. 式 (47), (48) の立式は楕円軌道の場合を前提として行ったが, 放物線, 双曲線の場合も同様に成り立つ.

3 ランベール問題

初期時刻 t_0 , 初期位置 $\mathbf{r}_0$, 任意の時刻 t およびそのときの位置 (終端位置) $\mathbf{r}$ が与えられたとき, 初期速度 $\dot{\mathbf{r}}_0$ を求める問題を考える. 結果として時刻 t における速度 (終端速度) $\dot{\mathbf{r}}$ も求まる. この問題をランベール問題と呼ぶ. 前節の問題設定とは異なり, ある 2 つの位置と飛行時間を与えたときに必要な初期速度を求める問題であり, ミッション設計の基礎的な解析に有用であるが, 前節と似た手順で解くことができる. なお 2 つの位置を結ぶ軌道は楕円軌道であることを前提とする. またこの問題には少なくとも 2 つの解が存在し得る (順行軌道および逆行軌道) こと, さらに楕円を 1 周以上周回する軌道も含めるとさらに多くの解が存在し得ることに注意されたい.

まず式 (1), (2) から

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{\mathbf{r} - F \mathbf{r}_0}{G} \quad (49)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{G} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{G} \quad (50)$$

が得られる. つまり F , G , $\dot{G}$ が求まればよいが, 与えられた条件 (t_0 , t , $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}$) からこれらを解析的に導くことはできないため, ケプラー方程式や前節の問題と同様数値計算が必要である. 以下では ΔE を用いる場合と s を用いる場合について触れるが, いずれも数値計算により解くべき方程式の導出まで紹介する. 具体的な解法はやはりニュートン・ラプソン法などが有用である.

いずれの場合も, まず与えられた条件から真近点角の変化量を求める.

$$\Delta \theta = \begin{cases} 2\pi N + \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{rr_0} \right) \\ 2\pi (1 + N) - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{rr_0} \right) \end{cases} \quad (51)$$

ただし N は周回数である．両者は順行軌道または逆行軌道に対応しており，ミッション要求に従いいずれかを選ぶとともに，周回数も定める．一般的には $N = 0$ のみを考えるミッションがほとんどであるが，必要に応じて $N = 1$ 以上の場合も考えることができる．解法は N の値によらず同様である．

初めに ΔE を用いる場合について説明する．式 (25), (26) より, $F, G, \dot{G}$ を得るには $a, \Delta E$ が求まればよいことが分かる．ここで式 (22), (25) から F を 2 通りに表すことで, また式 (23), (26) から $\dot{F}$ を 2 通りに表すことで得られる 2 つの a と p の関係式を連立して解けば次式が導かれる．

$$a = \frac{rr_0}{1 - \cos \Delta E} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} - \frac{\sin \Delta \theta \sin \Delta E}{\sqrt{rr_0 (1 - \cos \Delta \theta) (1 - \cos \Delta E)}} \right\} \quad (52)$$

$$p = \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} - \frac{\sin \Delta \theta \sin \Delta E}{\sqrt{rr_0 (1 - \cos \Delta \theta) (1 - \cos \Delta E)}}} \quad (53)$$

また式 (22), (25), (45), (46) から次式が導かれる．

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (\Delta E - \sin \Delta E) + \frac{rr_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Delta \theta \quad (54)$$

式 (54) に式 (52), (53) を代入すれば, t と ΔE の (与えられた条件から解くことができる) 関係式が導かれる．これを ΔE について数値的に解き, 式 (52) に代入すれば a が求まる．初期推定解としては $\Delta E = \Delta \theta$ が適切である．

次に s を用いる場合について説明する．式 (34), (35) より, $F, G, \dot{G}$ を得るには α, s が求まればよいことが分かる．必要な方程式を導出するために次のような数式処理を行う．まず式 (22), (34) から F を 2 通りに表し整理すると次式が得られる．

$$s = \sqrt{\frac{rr_0}{pC(z)} (1 - \cos \Delta \theta)} \quad (55)$$

ただし

$$z = \alpha s^2 \quad (56)$$

とした．また式 (23), (35) から $\dot{F}$ を 2 通りに表し, 式 (55), (56) を代入した後整理すると次式が得られる．

$$u = r + r_0 - \frac{1 - zS(z)}{\sqrt{C(z)}} v \quad (57)$$

ただし

$$u = \frac{rr_0}{p} (1 - \cos \Delta \theta) \quad (58)$$

$$v = \sqrt{\frac{rr_0}{(1 - \cos \Delta \theta)}} \sin \Delta \theta \quad (59)$$

とした．なお式 (55), (58) より

$$s = \sqrt{\frac{u}{C(z)}} \quad (60)$$

である．また式 (28), (29), (47), (48), (56) から次式が得られる．

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{u}{\mu}} v + \frac{s^3}{\sqrt{\mu}} S(z) \quad (61)$$

ここで, z が与えられれば式 (57), (59) より u, v が求まり, それと式 (59) より s も求まることが分かる．したがって式 (61) は t と z の関係式とみなすことができる．これを z について数値的に解き, 式 (57), (59), (60) より順に u, v, s を求め, 最後に式 (56) から α を求めればよい． z の初期推定解としては例えば $z = 0$ ($t = t_0$ に対応) が用いられる．

4 おわりに

例えば初期位置を地球の位置、終端位置を火星の位置とし、初期時刻が固定されている場合を考える。このとき終端時刻を様々に振り、それぞれについてランベール問題を解けば、各場合に対する初期速度（これから出発に必要な ΔV が決まる）および終端速度（これから火星到着時の火星に対する相対速度が決まる）が得られることになるが、その中でミッション要求（最も簡単には ΔV と火星相対速度）を満足する最も良い解を選ぶというのが軌道設計の基本的な考え方の一つである。実際はその他の条件（飛行時間や運用制約など）も含め満たす軌道の設計が求められる。

参考文献

1. 木田, 小松, 川口, 人工衛星と宇宙探査機, コロナ社, 2001.
2. 半揚, ミッション解析と軌道設計の基礎, 現代数学社, 2014.
3. H. Schaub and J.L. Junkins, Analytical Mechanics of Space Systems, American Institute of Aeronautics & Astronautics, 2018.