

惑星間軌道

中条 俊大

2023 年 5 月

本資料は東京工業大学の松永三郎教授の講義資料をもとに作成したものです。内容を一部削減し、変数の定義などは一部変更しています。

1 はじめに

本稿では、主に深宇宙探査ミッションにおける惑星間軌道設計の基礎について述べる。目的地に到達するためには、軌道力学の理解に基づき宇宙機に適切な軌道変更操作を行わなければならない。惑星間において宇宙機は太陽や惑星の重力の影響を受けて軌道運動するが、近似的に最も影響が大きい天体を基準とした二体問題のつなぎ合わせで考えられることが多い。以降、基本的な軌道変更に関する議論に続き、天体の重力圏（広義）の定義について述べた後、最も基本的な軌道設計法であるパッチドコニックス法について代表的な例とともに説明する。

2 軌道変更

宇宙機をある軌道からある別の軌道へ遷移させることを軌道変更と呼ぶことにする。例えば地球周回軌道から火星周回軌道へ遷移させるためには、(1) 地球周回軌道から地球-火星遷移軌道へ、(2) 地球-火星遷移軌道から火星周回軌道への最低 2 回の軌道変更が必要である（実際はその間に軌道補正を行うことが多い）。このように軌道遷移には一般に複数回の軌道変更が必要であり、軌道変更に要する推進剤消費量の総和を最小化することが重要である。一般的には推力はインパルス（瞬間的な力積）として近似されることが多く、それによる速度変化を ΔV という。連続的な推力による軌道変更を行う場合もあるが、本稿ではインパルスによる軌道変更を扱う。

2.1 1 インパルスによるマヌーバ

1 回のインパルスによる軌道遷移を考える。 V_1 , V_2 をそれぞれ軌道変更前の速度の大きさ、軌道変更後の速度の大きさとし、 ϕ を両速度のなす角とすると

$$\begin{aligned}\Delta V &= \sqrt{V_2^2 + V_1^2 - 2V_1V_2 \cos \phi} \\ &= \begin{cases} |V_2 - V_1| & \text{if } \phi = 0 \\ V_2 + V_1 & \text{if } \phi = \pi \\ 2V \sin \frac{\phi}{2} & \text{if } V_1 = V_2 = V \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

となる。なお、中心天体の重力定数 μ 、長半径 a のケプラー軌道上の動径 r の位置における速度の大きさ V は、

$$V = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (2)$$

と表される。

推進剤消費量 Δm はツィオルコフスキーの式から計算できる。ツィオルコフスキーの式は次の通り表される。

$$\Delta V = -gI_{sp} \ln \frac{m}{m_0} \quad (3)$$

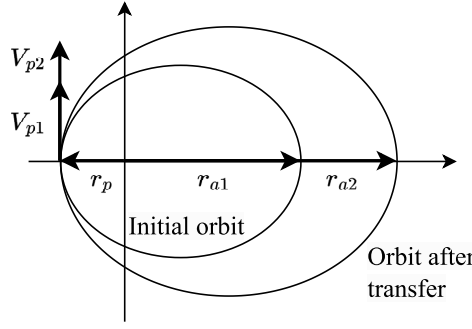


図1 遠点の変更のイメージ.

ただし $m = m_0 + \Delta m$ であり, g は重力加速度, I_{sp} は推進系の比推力, m , m_0 はそれぞれ宇宙機の質量および初期質量である. 式 (3) を Δm について解くと次式ようになる.

$$|\Delta m| = m_0 \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\Delta V}{g I_{sp}} \right) \right\} \quad (4)$$

ケプラー軌道間の軌道変更の代表的な例を示す.

例 1: 遠点の変更

図1を参照されたい. 近点距離を r_p とし, 変更前と変更後の遠点距離をそれぞれ r_{a1} , r_{a2} とする. 遠点を変更するためには近点で軌道変更すればよく, 軌道変更前と軌道変更後の近点における速度の大きさをそれぞれ V_{p1} , V_{p2} とすると

$$V_{p1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_p + r_{a1}} \right)} \quad (5)$$

$$V_{p2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_p + r_{a2}} \right)} \quad (6)$$

となる. $\Delta V = V_{p2} - V_{p1}$ であり, 方向は V_{p1} と等しい. 同様に遠点での軌道変更により近点の変更も可能である.

例 2: 長半径と離心率の変更

図2を参照されたい. 変更前と変更後の長半径をそれぞれ a_1 , a_2 , 変更前と変更後の離心率をそれぞれ e_1 , e_2 とする. 軌道変更直前および直後の速度の大きさをそれぞれ V_1 , V_2 とすると, それぞれ次式のように表される.

$$V_1 = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_1} \right)} \quad (7)$$

$$V_2 = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_2} \right)} \quad (8)$$

r は軌道変更を行う点の動径である. V_2 の方向は次のように幾何学的に求められる. まず軌道変更前後の角運動量を h_1 , h_2 とすると, それぞれ次式で表される.

$$h_1 = r V_1 \cos \beta_1 \quad (9)$$

$$h_2 = r V_2 \cos \beta_2 \quad (10)$$

また軌道変更前後の半直弦をそれぞれ2通りの方法で表すと次式が成り立つ.

$$a_1 (1 - e_1^2) = \frac{h_1^2}{\mu} \quad (11)$$

$$a_2 (1 - e_2^2) = \frac{h_2^2}{\mu} \quad (12)$$

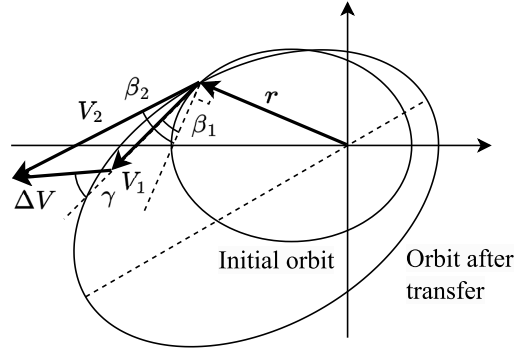


図2 長半径と離心率の変更のイメージ.

式 (7)-(12) より β_1, β_2 は次のように求まる.

$$\cos^2 \beta_1 = \frac{\mu a_1 (1 - e_1^2)}{r^2 V_1^2} = \frac{a_1^2 (1 - e_1^2)}{r (2a_1 - r)} \quad (13)$$

$$\cos^2 \beta_2 = \frac{\mu a_2 (1 - e_2^2)}{r^2 V_2^2} = \frac{a_2^2 (1 - e_2^2)}{r (2a_2 - r)} \quad (14)$$

ΔV とその方向はそれぞれ次のように求められる.

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)} \quad (15)$$

$$\sin \gamma = \frac{V_2 \sin(\beta_2 - \beta_1)}{\Delta V} \quad (16)$$

ただし任意の a_1, e_1 から任意の a_2, e_2 へ変更できるわけではなく, 制約条件が存在する. 式 (8) の根号の中が正でなければならないことから

$$a_2 \geq \frac{r}{2} \quad (17)$$

が成り立つ必要がある (制約条件 1). 次に式 (14) より

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta_2 &= \frac{a_2^2 (1 - e_2^2)}{r (2a_2 - r)} \leq 1 \\ \iff a_2^2 (1 - e_2^2) &\leq 2a_2 r - r^2 \\ \iff \{r - a_2 (1 - e_2)\} \{r - a_2 (1 + e_2)\} &\leq 0 \\ \iff r_{p2} \leq r \leq r_{a2} \end{aligned} \quad (18)$$

が成り立つ必要がある (制約条件 2). r_{p2}, r_{a2} はそれぞれ軌道変更後の近点距離および遠点距離である. また式 (13) から $r_{p1} \leq r \leq r_{a1}$ が成り立つ必要があることが分かる (制約条件 3). r_{p1}, r_{a1} はそれぞれ軌道変更前の近点距離および遠点距離である. 以上の 3 つが長半径と離心率を変更する際の制約条件である (制約条件 2, 3 は自明でもある).

例 3: 軌道傾斜角の変更

必要な ΔV は幾何学的に次のように表されることが分かる.

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\Delta i}{2} \quad (19)$$

ただし Δi は軌道傾斜角の角度変化量である. 式 (19) より, 例えば $\Delta i = 60 \text{ deg}$ のとき $\Delta V = V$ となることから, 軌道傾斜角の大きな変更に必要な ΔV は極めて大きいことが分かる.

2.2 ホーマン遷移

同一平面内の 2 つの円軌道間の遷移を考えると, 両軌道に遠点および近点で接する楕円軌道をホーマン遷移軌道と呼ぶ (図 3). ホーマン遷移のためには, その楕円軌道の近点および遠点で軌道変更を行えばよい. 2 つの円軌道の

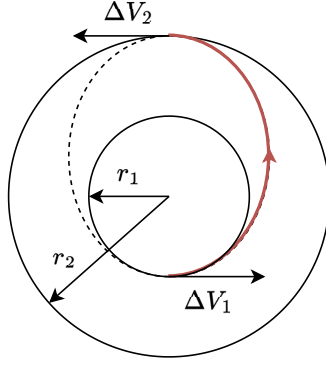


図3 ホーマン遷移のイメージ.

半径をそれぞれ r_1 , r_2 , 2 回の軌道変更におけるそれぞれの速度変化の大きさを ΔV_1 , ΔV_2 , それらの和を ΔV とすると, 式 (5), (6) より次式が得られる.

$$\Delta V_1 = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad (20)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \quad (21)$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (22)$$

2 インパルスの中ではホーマン遷移の ΔV が最小となる. 以下ではこの事実を証明する. 半径 r_1 の円軌道 O_1 から半径 r_2 の円軌道 O_2 に 2 インパルスで遷移するために, O_1 上のある点 P_1 から O_2 上のある点 P_2 に遷移する軌道 (長半径 a) を考える. 点 P_1 での速度の動径方向成分と偏角方向成分をそれぞれ v_{r1} , $v_{\theta1}$ とし, 同様に点 P_2 における両成分を v_{r2} , $v_{\theta2}$ とする. 角運動量保存則とエネルギー保存則より

$$r_1 v_{\theta1} = r_2 v_{\theta2} \quad (23)$$

$$\frac{v_{r1}^2}{2} + \frac{v_{\theta1}^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{v_{r2}^2}{2} + \frac{v_{\theta2}^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{2a} \quad (24)$$

が成り立つ. 式 (23), (24) より

$$v_{\theta2} = \frac{r_1}{r_2} v_{\theta1} \quad (25)$$

$$v_{r2}^2 = v_{r1}^2 + \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) v_{\theta1}^2 - 2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (26)$$

が得られる. O_1 , O_2 上の周回速度の大きさはそれぞれ $\sqrt{\mu/r_1}$, $\sqrt{\mu/r_2}$ であるため, 点 P_1 , P_2 上における速度変化の大きさ ΔV_1 , ΔV_2 はそれぞれ次のようになる.

$$(\Delta V_1)^2 = v_{r1}^2 + \left(v_{\theta1} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \right)^2 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (\Delta V_2)^2 &= v_{r2}^2 + \left(v_{\theta2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \right)^2 \\ &= v_{r1}^2 + \left(v_{\theta1} - \sqrt{\frac{\mu r_1^2}{r_2^3}} \right)^2 + \mu \left(\frac{3}{r_2} - \frac{2}{r_1} - \frac{r_1^2}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ を最小とする v_{r1} , $v_{\theta1}$ を考える. $v_{\theta1}$ を固定したとき, ΔV_1 , ΔV_2 はともに v_{r1}^2 の増加関数であるため, ある $v_{\theta1}$ に対して遷移軌道が O_2 に到達する最小の v_{r1} を求めるという計算を任意の $v_{\theta1}$ に対して行い, それらの中で最小の ΔV を見つければよいことが分かる. ある $v_{\theta1}$ に対して遷移軌道が O_2 に到達する最小の v_{r1}^2 が得られるとき, 次の条件のいずれかが満たされている.

1. $v_{r1} = 0$.

2. 遷移軌道が O_2 に接しており、かつ v_{r1}^2 をそれ以上小さくすると O_2 に到達しなくなる。

条件 1 の場合、点 P_1 は遷移軌道の近点であることを意味する。 $v_{r1} = 0$ であるため、簡単に $v_{\theta 1} = v$ と書くことにする。 遷移軌道は O_2 に到達しなければならないので、 $2a \geq r_1 + r_2$ を満たす必要がある。 式 (24) より

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} &= -\frac{\mu}{2a} \geq -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \\ \iff v^2 &\geq \frac{2\mu r_2}{r_1(r_1 + r_2)} \end{aligned} \quad (29)$$

$v \geq 0$ として

$$v \geq \sqrt{\frac{2\mu r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \quad (30)$$

となる。 また式 (27), (28) は

$$(\Delta V_1)^2 = \left(v - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \right)^2 \quad (31)$$

$$(\Delta V_2)^2 = \left(v - \sqrt{\frac{\mu r_1^2}{r_2^3}} \right)^2 + \mu \left(\frac{3}{r_2} - \frac{2}{r_1} - \frac{r_1^2}{r_2^3} \right) \quad (32)$$

となる。 $\epsilon = r_1/r_2 \leq 1$ とおくと $r_1^2/r_2^3 = \epsilon^3/r_1$, $2r_2/\{r_1(r_1 + r_2)\} = 2/\{r_1(1 + \epsilon)\}$ より

$$\frac{r_1^2}{r_2^3} \leq \frac{1}{r_1} < \frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)} \quad (33)$$

が成立するので、式 (30), (31), (32) とあわせて $(\Delta V_1)^2$, $(\Delta V_2)^2$ とともに v の増加関数であることが分かる。 したがって ΔV は式 (30) の等号が成り立つとき、すなわち遷移軌道の長半径が $a = (r_1 + r_2)/2$ のときに最小となる。 このとき点 P_2 は遠点となり、遷移がホーマン遷移であることを意味する。 条件 2 の場合は点 P_2 が遠点であることに対応するが、同様の手順で ΔV が最小となるのはホーマン遷移の場合であることを示せる。

なお 2 つの円軌道の半径比が 11.8 以下の場合は 2 インパルスホーマン遷移における ΔV が最小となるが、半径比が 11.8 以上の場合は 3 インパルスの方がより小さい ΔV で遷移できることが知られている。

3 重力圏（広義）

複数の重力天体に対し、特定の天体による重力（引力）の影響が他の天体よりも卓越する領域を重力圏（広義）と呼ぶ。 ここではその定義について述べる。

3.1 三体問題の運動方程式

物体に対する、ある天体と別のある天体による重力の影響の大きさは、三体問題の運動方程式を起点として比較することができる。 質点 m_i ($i = 1, 2, 3$) の位置 P_i の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ として（図 4）万有引力下の運動を考えると、質点 1 の運動方程式は次式となる。

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Gm_1 m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (34)$$

G は万有引力定数である。 同様に質点 2, 3 についても運動方程式を立て、それらを整理すると次式が得られる。

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (35)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\mathbf{d}}{d^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (36)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{d}}{d^3} \quad (37)$$

ただし $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ であり、 $r = |\mathbf{r}|$, $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$, $d = |\mathbf{d}|$ とした。

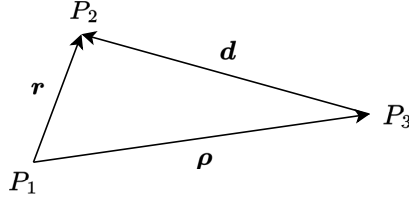


図4 三天体の位置関係.

3.2 摂動力

質点 m_2 にとって質点 m_1 の重力の影響を主としたとき、質点 m_3 の存在により質点 m_2 が受ける影響は摂動として考えられる。質点 1 を地球、質点 2 を月、質点 3 を太陽と考えれば、地球周りを公転する月に作用する太陽の影響を調べることに相当する。式 (35), (36) より次式が得られる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - Gm_3 \left(\frac{\mathbf{d}}{d^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \quad (38)$$

式 (38) の右辺第一項はケプラー力 ($\mathbf{K}$ とする) と呼ばれ、質点 m_2 に対する m_1 の重力である。二体問題の場合はケプラー力のみが考慮されていることになる。右辺第二項は摂動力 ($\mathbf{R}$ とする) と呼ばれ、質点 3 の存在により足される項である。質点 m_2 が質点 m_1, m_3 を結ぶ直線上にある特殊な場合、 $\mathbf{i} = -\boldsymbol{\rho}/\rho$ とすると、 $\mathbf{d}/d = \mathbf{i}$ であるから

$$\mathbf{R} = Gm_3 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{d^2} \right) \mathbf{i} = \frac{Gm_3}{\rho^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{d^2} \right) \mathbf{i} \quad (39)$$

となる。式 (39) より

- 質点 2 (月) が質点 1 (地球) から見て質点 3 (太陽) 側にあるとき、 $d < |\rho|$ より $\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} < 0$
- 質点 2 (月) が質点 1 (地球) から見て質点 3 (太陽) の反対側にあるとき、 $d > |\rho|$ より $\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} > 0$

となる。つまり天体の位置関係によって摂動力の方向が変わることが分かる。

摂動力は摂動ポテンシャル V により表現できる。

$$\mathbf{R} = \text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (40)$$

摂動ポテンシャルは次式で定義される (式 (40) に代入すれば確認できる)。

$$\begin{aligned} V &= Gm_3 \left(\frac{1}{d} - \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}}{\rho^3} \right) \\ &= Gm_3 \left(\frac{1}{d} - \frac{r \cos \theta}{\rho^2} \right) = \frac{Gm_3}{\rho} \left(\frac{\rho}{d} - \nu \kappa \right) = \frac{Gm_3}{\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\nu\kappa + \kappa^2}} - \nu\kappa \right) \end{aligned} \quad (41)$$

ただし $\kappa = r/\rho$, $\mathbf{r}$ と $\boldsymbol{\rho}$ となす角を θ とし、 $\nu = \cos \theta$ とした。ここで $\kappa \ll 1$ である (地球-月間距離が地球-太陽間距離に比べて十分小さい) とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{Gm_3}{\rho} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (-2\nu\kappa + \kappa^2) + \frac{3}{8} (-2\nu\kappa + \kappa^2)^2 + \cdots - \nu\kappa \right\} \\ &\approx \frac{Gm_3}{\rho} \left(1 + \frac{3\nu^2 - 1}{2} \kappa^2 \right) \end{aligned} \quad (42)$$

と近似できる。式 (40) に式 (42) を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{R} \approx Gm_3 \frac{r}{\rho^3} \left(3 \cos \theta \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} - \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (43)$$

$$R \approx Gm_3 \frac{r}{\rho^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \quad (44)$$

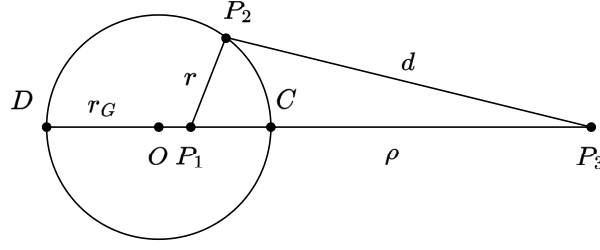


図5 重力圏（狭義）.

ただし $R = |\mathbf{R}|$ とした. いずれも r, ρ を成分表示して式を整理することで示せる. $\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \approx 1$ とすると

$$R \approx Gm_3 \frac{r}{\rho^3} \quad (45)$$

である. さらに $m_2 \ll m_1$ (月の質量が地球の質量に比べて十分小さい) とすると, ケプラー力の大きさは

$$K \approx \frac{Gm_1}{r^2} \quad (46)$$

と近似できる. ただし $K = |\mathbf{K}|$ とした. 式 (45), (46) より, 摂動力とケプラー力の大きさの比はおおよそ次のように表される.

$$\frac{R}{K} \approx \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{r}{\rho} \right)^3 \quad (47)$$

3.3 重力圏（狭義）

質点 2 に対して質点 1, 3 の重力の大きさが等しくなる点を考える. それぞれの重力の大きさ (ケプラー力) を K_1, K_3 とすると, $K_1 = Gm_1/r^2$, $K_3 = Gm_3/d^2$ より, $K_1 = K_3$ のとき

$$\frac{r}{d} = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \equiv m \quad (48)$$

$m_1 \ll m_3$ とすると $m \ll 1$ である. 式 (48) は質点 2 から質点 1, 3 までの距離の比が一定であること, つまり質点 2 がある球 (質点 1, 2, 3 を通る平面による切断面がアポロニウスの円となる) 面上にあることを意味している (図 5). この球の内部では質点 1 の重力が質点 3 の重力より大きくなる. したがってこの球の内部を重力圏 (狭義) と呼ぶ. 図 5 において

$$CP_1 = \frac{m}{1+m}\rho, \quad P_1D = \frac{m}{1-m}\rho, \quad P_1O = \frac{m^2}{1-m^2}\rho \quad (49)$$

であることから

$$r_G = \frac{m}{1-m^2}\rho \approx m\rho = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}\rho \quad (50)$$

となる (r_G を重力半径と呼ぶ). 重力圏は質点 1 を中心とした半径 r_G の球と近似することができ, その半径は質点 1, 3 の質量比の 2 分の 1 に比例することが分かる.

質点 1 を地球, 質点 2 を月, 質点 3 を太陽と考えれば, $r_G = 26$ 万 km となるが, これは月の公転軌道半径の 38 万 km より小さく, 月が地球の重力圏の外側に存在することになり, 月は地球の重力圏 (広義) 内に存在するという定性的解釈に対して重力圏 (狭義) は不適切な指標であることが分かる. これは重力圏 (狭義) が重力 (ケプラー力) の大小を評価しているのみで摂動力の影響を考慮していないことによる.

3.4 作用圏

質点 3 を基準とした質点 2 の運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{d}} = -G(m_2 + m_3) \frac{\mathbf{d}}{d^3} + Gm_1 \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \quad (51)$$

質点 1 を基準とした質点 2 の運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + Gm_3 \left(-\frac{\mathbf{d}}{d^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) \quad (52)$$

である．式 (51) の右辺第一項の大きさを K_3 ，第二項の大きさを R_3 ，式 (52) の右辺第一項の大きさを K_1 ，第二項の大きさを R_1 とおくと，質点 1 の作用圏 (Sphere of Influence) は

$$\frac{R_1}{K_1} \leq \frac{R_3}{K_3} \quad (53)$$

が成り立つ領域として定義される．つまり質点 2 にはたらく質点 1 によるケプラー力に対する質点 3 による摂動力の比が，質点 3 によるケプラー力に対する質点 1 による摂動力の比よりも小さいことを意味し，質点 3 による作用が質点 1 による作用よりも小さいことを表す．質点 1 の作用圏内に質点 2 が存在する場合，質点 2 は質点 1 の周りを公転し得るといえる．この場合，質点 3 の影響は摂動力とみなせる．より粗い近似では，質点 1 の作用圏内では質点 3 の摂動力を無視して質点 1 の重力のみを考え，作用圏外では質点 1 の摂動力を無視して質点 3 の重力のみを考えることもできる． $\rho \gg r$ とすると

$$K_3 \approx \frac{Gm_3}{\rho^2}, \quad R_3 \approx \frac{Gm_1}{r^2} \quad (54)$$

から

$$\frac{R_3}{K_3} \approx \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \quad (55)$$

となる．また

$$K_1 \approx \frac{Gm_1}{r^2}, \quad R_1 \approx Gm_3 \frac{r}{\rho^3} \quad (56)$$

から

$$\frac{R_1}{K_1} \approx \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{r}{\rho} \right)^3 \quad (57)$$

となる．式 (53)，(55)，(57) より，作用圏の半径 r_I は次のように求まる．

$$r_I = \left(\frac{m_1}{m_3} \right)^{\frac{2}{5}} \rho \quad (58)$$

作用圏は質点 1 を中心とした半径 r_I の球と近似することができる．質点 1 を地球，質点 2 を月，質点 3 を太陽と考えると， $r_I = 93$ 万 km となり，月の公転軌道半径の 38 万 km より大きいので，作用圏は重力圏（広義）の指標として適切であるといえる．

3.5 ヒル圏

質点 3 の摂動力を受けながら，質点 1 の周りを運動している微小質点 2（ゼロと近似できる場合）がいつまでも質点 1 近傍に留まり得る最大領域をヒル圏と呼ぶ．その半径 r_H は近似的には次式のように表される（導出は省略）．

$$r_H = \left(\frac{m_1}{3m_3} \right)^{\frac{1}{3}} \rho \quad (59)$$

4 パッチドコニックス法

惑星間航行軌道を二体問題の解析解である円錐曲線（円，楕円，双曲線）軌道のつなぎ合わせで近似する方法をパッチドコニックス法 (Patched Conic Method) という．代表的な例として，宇宙機が地球周回のパーキング軌道（円軌道）から惑星間に脱出し，別の惑星（例えば火星）近傍に到達した後，火星周回円軌道に投入するミッションを考える．二体問題の中心天体は宇宙機がどの天体の作用圏内にいるかによって決めることが一般的であり，この例では地球の作用圏内にいる間は地球を中心とした二体問題，地球の作用圏外に脱出した後は太陽を中心とした二体問題，火星の作用圏内に到達した後は火星を中心とした二体問題として考え，それらの境界において円錐曲線をつなぎ合わせ

る。ただしより簡単な近似の方法として、惑星（地球や火星）の作用圏はそれぞれの惑星から見て無限大かつ太陽系の大きさと比較して無視できるほど小さいと仮定する、ゼロポイントパッチドコニック法を利用すること多い。

この例においてゼロポイントパッチドコニック法により軌道設計を行う。ただし宇宙機と惑星は黄道面内にあるとし、2 インパルスホーマン遷移による軌道変更を考える。図 6 を参照されたい。

1. (図 6 左) まず太陽を中心とした二体問題として地球から火星に遷移する 2 インパルスホーマン遷移軌道を考える。このとき出発点は地球の位置（点）、到着点は火星の位置（点）とし、地球と火星の重力の影響は考えない（それぞれの作用圏が太陽系に対して無視できるほど小さいという仮定）。遷移時間 T は

$$T = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_S}} \quad (60)$$

である。ただし μ_S , a はそれぞれ太陽の重力定数、遷移軌道の長半径であり、地球と火星の公転軌道半径をそれぞれ r_E , r_M とすれば $a = (a_E + a_M)/2$ である。この遷移時間を考慮して適切な出発時刻を決定する。地球出発時の地球に対する相対速度の大きさを $v_{\infty/E}$ とすると、式 (20) より次式のように書ける。

$$v_{\infty/E} = \sqrt{2\mu_S \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_E + r_M} \right)} - \sqrt{\frac{\mu_S}{r_E}} \quad (61)$$

同様に火星到着時の火星に対する相対速度の大きさを $v_{\infty/M}$ とすると、式 (21) より次式のように書ける。

$$v_{\infty/M} = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_M}} - \sqrt{2\mu_S \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_E + r_M} \right)} \quad (62)$$

2. (図 6 中央) 次に地球周回パーキング軌道から式 (61) の条件で脱出する軌道を、地球を中心とした二体問題で考える。ここでは地球の作用圏の大きさを無限大と仮定するため、パーキング軌道上の適切な位置で軌道変更を行い、無限遠速度の大きさが $v_{\infty/E}$ となる双曲線軌道に遷移すればよいと考える。 μ_E を地球の重力定数、パーキング軌道の半径を r_{pE} 、速度の大きさを v_{pE} とすると、力学的エネルギー保存則より

$$\frac{v_{pE}^2}{2} - \frac{\mu_E}{r_{pE}} = \frac{v_{\infty/E}^2}{2} \quad (63)$$

が成り立つ。したがって

$$v_{pE} = \sqrt{v_{\infty/E}^2 + \frac{2\mu_E}{r_{pE}}} \quad (64)$$

である。軌道変更前のパーキング軌道における速度の大きさは $\sqrt{\mu_E/r_{pE}}$ であるため、速度変化の大きさ Δv_E は

$$\Delta v_E = \sqrt{v_{\infty/E}^2 + \frac{2\mu_E}{r_{pE}}} - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_{pE}}} \quad (65)$$

となる。

3. (図 6 右) 同様に式 (62) の条件により進入する軌道から火星周回円軌道への遷移を、火星を中心とした二体問題で考える。ここでは火星の作用圏の大きさを無限大と仮定するため、無限遠速度の大きさが $v_{\infty/M}$ の双曲線軌道上の近火点において軌道変更を行い、円軌道に遷移すればよいと考える。 μ_M を地球の重力定数、近火点距離（円軌道の半径）を r_{pM} 、速度の大きさを v_{pM} とすると、式 (64) と同様に

$$v_{pM} = \sqrt{v_{\infty/M}^2 + \frac{2\mu_M}{r_{pM}}} \quad (66)$$

となる。軌道変更後の円軌道における速度の大きさは $\sqrt{\mu_M/r_{pM}}$ であるため、速度変化の大きさ Δv_M は

$$\Delta v_M = \sqrt{v_{\infty/M}^2 + \frac{2\mu_M}{r_{pM}}} - \sqrt{\frac{\mu_M}{r_{pM}}} \quad (67)$$

となる。

必要な速度変化の大きさの総和は $\Delta v_E + \Delta v_M$ である。

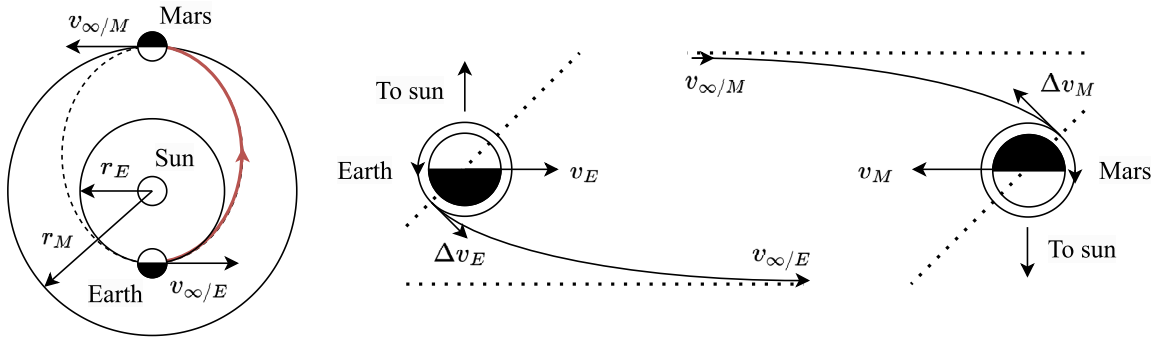


図6 パッチドコニックス法のイメージ.

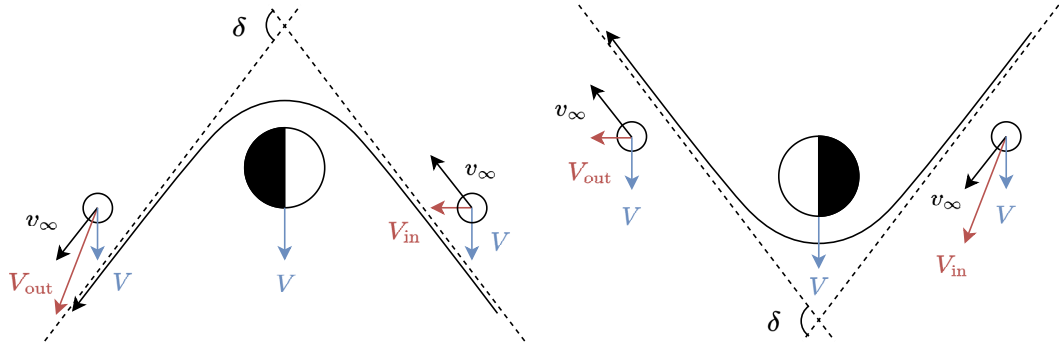


図7 スイングバイのイメージ (左: 加速, 右: 減速).

5 スイングバイ

宇宙機が惑星の近傍を通過することをスイングバイ（またはフライバイ）と呼ぶ．惑星の重力を利用して，惑星間軌道における運動エネルギーをスイングバイ前後で変化させることが可能であり，深宇宙航行において有用な軌道制御手法である．スイングバイ時の宇宙機の運動は，惑星を中心とした二体問題における双曲線軌道で近似できる．惑星から見れば，双曲線軌道の無限遠における進入速度と脱出速度の大きさは変わらないが，方向は変化する．太陽を基準に見れば，これらの惑星に対する相対速度に惑星の公転速度が足されるため，速度の大きさも変わることになる．

図7を参照されたい．スイングバイにおける偏向角 δ は

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + r_p v_{\infty}^2 / \mu} \quad (68)$$

で表される． μ は惑星の重力定数， r_p は近点距離， v_{∞} は無限遠速度の大きさである．式 (68) より r_p ， v_{∞} が小さく（大きく） μ が大きい（小さい）と δ が大きく（小さく）なることが分かる．図7より，惑星の公転運動に対して後ろ側をスイングバイすれば宇宙機の進入速度（大きさは V_{in} ）は惑星の速度（大きさは V ）方向に変化し，脱出速度の大きさ V_{out} は V_{in} より大きくなることが分かる．逆に惑星の前側をスイングバイすれば宇宙機は減速する．一般に r_p には天体の大きさなどから下限があるため， δ には上限があることになる．軌道設計においては，この制約のもとで必要な脱出速度を得るためにスイングバイ条件を定めることになる．場合によっては複数回，複数天体でのスイングバイを行い目的地に到達することもある．

6 おわりに

（ゼロポイント）パッチドコニックス法の例では，地球周回パーキング軌道から2インパルスホーマン遷移による火星周回軌道への投入の計算例を示したが，同様にして金星など他の天体への到達や惑星表面への着陸を目指した軌道を設計することもできる．実際には2インパルスホーマン遷移では非常に大きな ΔV を要するため，スイングバイを（場合によっては複数回）利用して目的地を目指すことが多い．その場合でもゼロポイントパッチドコニックス法は

有用であり、スイングバイする天体の位置において速度変化（惑星に対する宇宙機の相対進入速度と近点距離により偏向角が決まり、それにより速度変化が決まる）が瞬間的に起こると考えて計算すればよい。

参考文献

1. 木田, スペースクラフトの制御, コロナ社, 1999.
2. 木田, 小松, 川口, 人工衛星と宇宙探査機, コロナ社, 2001.
3. 半揚, ミッション解析と軌道設計の基礎, 現代数学社, 2014.